Etude qualitative d'une onde non-linéaire concentrée

par

Slim IBRAHIM

1. Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'une suite $\underline{u} := (u_n)_n$ solution de l'équation des ondes critique à coefficients variables

$$\square_A u + |u|^{p_c - 1} u := \partial_t^2 u - \operatorname{div}(A(x)\nabla_x u) + |u|^{p_c-1} u = 0, \;\; \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d, \tag{1}$$

avec des données de Cauchy à l'instant $t = 0$;

$$(u_n, \partial_t u_n)_{|t=0} = (\varphi_n, \psi_n),$$

bornées dans l'espace d'énergie $\mathcal{E} := (\dot{H}^1 \times L^2)(\mathbb{R}^d)$ et compacte à l'infini *i.e.*

$$\overline{\lim_n} \int_{|x|\geq R} \left[|\nabla \varphi_n|^2 + |\psi_n|^2 \right] dx \longrightarrow 0; \;\; R \to +\infty.$$

On suppose que $d \geq 3$, $p_c = \frac{d+2}{d-2}$ et que A est une fonction dans $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans les matrices $d \times d$ symétriques, et vérifiant l'hypothèse

$$c_0 |\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq c_0^{-1} |\xi|^2, \;\; \forall x, \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{$\mathcal{H}$}$$

La constante $0 < c_0 \leq 1$ est fixée. Lorsque $A(x) \equiv \mathrm{Id}$, cas constant, nous retrouvons l'opérateur d'Alembertien sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$, définie par $\square := \partial_t^2 - \Delta_x$. L'existence globale des solutions de (1) telles que $(u, \partial_t u) \in \mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ et $u \in L^{p_c}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))$, a été établie par S. Ibrahim et M. Majdoub [6].

Notre but est d'approcher, dans l'espace d'énergie $\mathcal{E}$, la suite $\underline{u}$ par une suite de fonctions "plus simples". Un rôle particulier est joué ici par la suite $\underline{v}$, solution de l'équation des ondes linéaire à coefficients variables

$$\square_A v = 0, \tag{2}$$

Faculté des Sciences de Bizerte, Département de Mathématiques, Zarzouna 7021, Bizerte, TUNISIE
e-mail : slim.ibrahim@fsb.rnu.tn

avec les mêmes données de Cauchy à $t = 0$, *i.e.*

$$(v_n, \partial_t v_n)_{|t=0} = (u_n, \partial_t u_n)_{|t=0}\,.$$

Pour étudier la suite $\underline{u}$, nous commençons par établir un théorème de structure de la suite $\underline{v}$. Introduisons d'abord les définitions suivantes.

Définition 1.1. *On appelle une donnée concentrée, tout élément* $(\varphi, \psi, \underline{h}, \underline{x}, \underline{t})$ *de l'espace* $\mathcal{E} \times (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *avec*

$$\lim_n h_n = 0, \;\; \lim_n x_n = x_\infty \;\; et \;\; \lim_n t_n = t_\infty.$$

Deux données concentrées $(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}, \underline{h}^{(j)}, \underline{x}^{(j)}, \underline{t}^{(j)}$, $j = 1, 2$ *sont dites orthogonales si*

$$\text{(3)} \qquad \lim_n \Big| \log\Big(\frac{h_n^{(1)}}{h_n^{(2)}}\Big)\Big| = +\infty \;\; ou\ bien \;\; h_n^{(1)} = h_n^{(2)} \;\; et \;\; \lim_n \frac{|(x_n^{(1)}, t_n^{(1)}) - (x_n^{(2)}, t_n^{(2)})|}{h_n^1}.$$

A toute donnée concentrée $(\varphi, \psi, \underline{h}, \underline{x}, \underline{t})$, nous associons une onde linéaire concentrée notée $\underline{v} := (v_n)_n$ et définie par

$$\begin{cases} \Box_A v_n = 0 \\ (v_n, \partial_t v_n)_{|t=t_n}(x) = D_{h_n, x_n}(\varphi, \psi)(x) := h_n^{1-\frac{d}{2}}\Big(\varphi, \dfrac{1}{h_n}\psi\Big)\Big(\dfrac{x - x_n}{h_n}\Big). \end{cases}$$

Définition 1.2. *Soit* $\underline{v}$ *une onde linéaire concentrée. On appelle onde non-linéaire concentrée associée à* $\underline{v}$*, la suite* $\underline{u}$ *solution du problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} \Box_A u_n + |u_n|^{p_c - 1} u_n = 0 \\ (u_n, \partial_t u_n)_{|t=0} = (v_n, \partial_t v_n)_{|t=0}. \end{cases}$$

2. Résultats et schémas des preuves

Le premier résultat montre, sous une hypothèse géométrique, que la suite $\underline{v}$ est une superposition d'ondes linéaires concentrées.

Théorème 2.1. *On suppose que le rayon d'injectivité* δ *de la variété* $(\mathbb{R}^d, A^{-1})$ *est strictement positif. Alors il existe* v *solution de (2), et il existe une famille d'ondes* *concentrées* $\underline{v}^{(j)}$*, associées à des données* $(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}, \underline{h}^{(j)}, \underline{x}^{(j)}, \underline{t}^{(j)})$*,* $j \geq 1$*, deux à deux orthogonales telle que, à extraction près, on ait : pour tout* $\ell \geq 1$*,*

$$v_n(t,x) = v(t,x) + \sum_{j=1}^{\ell} v_n^{(j)}(t,x) + k_n^{(\ell)}(t,x),$$

et pour tout $0 \leq T < \delta$*,*

$$\overline{\lim_n} \|k_n^{(\ell)}\|_{L^\infty([-T,T],L^{p_c+1}(\mathbb{R}^d))} \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ \ell \to +\infty.$$

Dans la preuve de ce résultat, nous suivons les étapes de [2] ; nous décomposons, selon un théorème de P. Gérard [3], la donnée initiale en série de données $\underline{h}-$oscillantes. Ensuite nous propageons la $\underline{h}-$oscillation. Le résultat est alors obtenu par induction. L'hypothèse géométrique du théorème est utilisé pour démontrer l'orthogonalité des profils.

Le théorème 1 ramène la description de la suite $\underline{u}$ à l'étude du cas modèle d'une onde non-linéaire concentrée. Le but de ce qui suit est de décrire toute onde non-linéaire concentrée, dans l'approximation haute fréquence, c'est-à-dire modulo des suites $(r_n)_n$ qui sont relativement compactes pour la norme

$$|||r||| = \sup_I (\|r(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \|\partial_t r(t,\cdot)\|_{L^2}) + \|r\|_{L^{p_c}(I,L^{2p_c})}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Il s'agit de trouver des ondes linéaires concentrées $\underline{f}$ telles que $\underline{u} = \underline{f} + \underline{r}$ avec $\lim_n |||r_n|||_I = 0$.

L'idée de base réside dans les deux résultats suivants.

Lemme 2.1. *Pour tout entier* n*, on note par* $\underline{r}$ *et* $\underline{\rho}$ *les solutions respectives de*

$$\Box_A r_n = 0, \ \ (r_n, \partial_t r_n)_{|t=0} = (\varphi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)})$$

$$\Box_A \rho_n + |\rho_n|^{p_c - 1}\rho_n = 0, \ \ (\rho_n, \partial_t \rho_n)_{|t=0} = (\varphi_n^{(2)}, \psi_n^{(2)}),$$

où $(\varphi_n^{(i)}, \psi_n^{(i)})_n$ *est bornée dans l'espace d'énergie* $\mathcal{E}$ *et compacte à l'infini alors, pour toute suite d'intervalles* $([a_n, b_n])_n$ *de* $\mathbb{R}$*, on a*

$$(4) \qquad \overline{\lim_n} |||\rho_n - r_n|||_{[a_n,b_n]} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & \overline{\lim_n} E_0(\rho_n - r_n, a_n) = 0 \\ (ii) & \overline{\lim_n} \sup_{t\in[a_n,b_n]} \|r_n(t,\cdot)\|_{L^{p_c+1}(\mathbb{R}^d)} = 0. \end{cases}$$

Lemme 2.2. *Soit $f(s,y)$ une fonction régulière définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ et telle que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^+$, sa restriction sur $[-\lambda,\lambda]\times\mathbb{R}$ soit à support dans un compact K_λ. Alors on a*

$$\overline{\lim_n}\left\|\operatorname{div}_y\left[(A(h_n+x_n)-A(x_\infty))\nabla_y f\right]\right\|_{L^1([-\lambda,\lambda],L^2(\mathbb{R}^3))}=0.$$

Le lemme 2.1 est une variante du Théorème B de [4]. Il montre que pour approcher $\underline{\rho}$ par une suite linéaire $\underline{r}$ sur un intervalle, il faut d'abord avoir une énergie initiale petite de la différence $(\underline{\rho}-\underline{r})$ et ensuite que la suite $\underline{f}$ ne présente pas un effet de concentration sur l'intervalle $[a_n,b_n]$ (c'est la propriété (ii) du lemme 2.2).

Le second lemme montre qu'en variables "microscopiques" $s=\frac{t-t_n}{h_n}$ et $y=\frac{x-x_n}{h_n}$, les deux opérateurs $\square_{A(h_n.+x_n)}$ et $\square_{A(x_\infty)}$ sont "équivalents". Ceci nous amène donc à diviser l'étude en deux parties.

Partie I. Etude pour des temps t "loin" du temps de concentration. Dans cette partie nous montrons, sous une hypothèse de non concentration d'aspect "géométrique" (voir la définition ci-dessous), que toute onde linéaire concentrée vérifie une propriété de non-concentration du type (4).

Définition 2.1. *Soient $t_\infty\in\mathbb{R}$, x_∞ un point de $\mathbb{R}^d$ et I un ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant pas t_∞. On dit que la métrique A satisfait l'hypothèse géométrique sur l'intervalle I et au point x_∞ si la condition*

$$(\mathcal{H}_{\mathcal{G}})(\mathbf{I},x_\infty)\qquad\begin{cases}\forall s\in t_\infty-I,\ \ \forall y\in\mathbb{R}^d,\\ \operatorname{mes}_{S^{d-1}}\{\xi;\Pi_1\circ\Phi_s(y,\xi)=x_\infty\}=0\end{cases}$$

est vérifiée. L'application Π_1 désigne la première projection $(x,\xi)\to x$ et Φ_s le flot associé au champ Hamiltonien $H_{\sqrt{A(x)\xi\cdot\xi}}$.

Partie II. Etude locale pour les temps $t\in[t_\infty-\lambda h_n,t_\infty+\lambda h_n]$. Dans cette étude, les résultats du lemme 1.2 nous permettent d'utiliser les opérateurs d'ondes et de scattering de l'équation, lorsque les coefficients sont figés au point de concentration x_∞. Ces opérateurs sont définis dans [1] de la manière suivante.

Proposition 2.1. *Soit x_∞ un point de $\mathbb{R}^d$. On a alors*

(i) A toute donnée de Cauchy $(\varphi,\psi)\in\mathcal{E}$ et v^∞ solution de

$$\begin{cases}\square_{A(x_\infty)}v^\infty=0\\ (v^\infty,\partial_t v^\infty)_{|t=0}=(\varphi,\psi),\end{cases}$$

correspond une unique fonction $u_\pm^\infty$, à énergie finie, solution de

$$\begin{cases} \Box_{A(x_\infty)} u_\pm^\infty + |u_\pm^\infty|^{p_c-1} u_\pm^\infty = 0 \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} E_0(u_\pm^\infty - v^\infty, t) = 0. \end{cases}$$

(ii) Les opérateurs d'ondes

$$\Omega_\pm^\infty : (v^\infty, \partial_t v^\infty)_{|t=0} \longmapsto (u_\pm^\infty, \partial_t u_\pm^\infty)_{|t=0}$$

sont bijectifs de l'espace d'énergie $\mathcal{E}$ dans lui-même, ce qui permet de définir l'opérateur de scattering S^∞ par

$$S^\infty := (\Omega_+^\infty)^{-1} \circ \Omega_-^\infty.$$

De la même manière que dans [1], à toute onde concentrée $\underline{v}$ de données $(\varphi, \psi, \underline{h}, \underline{x}, t_\infty)$, nous associons les deux ondes concentrées $\underline{v}_\pm^\infty := (v_{n,\pm}^\infty)_n$ de données $(\varphi_\pm^\infty, \psi_\pm^\infty, \underline{h}, \underline{x}, \underline{t})$ où l'on a

$$(\varphi_-^\infty, \psi_-^\infty) := \begin{cases} (\varphi, \psi) & \text{si } \lim\limits_n \dfrac{t_n}{h_n} = +\infty \\ \Omega_-^\infty(\varphi, \psi) & \text{si } \lim\limits_n \dfrac{t_n}{h_n} = 0 \\ S^\infty(\varphi, \psi) & \text{si } \lim\limits_n \dfrac{t_n}{h_n} = -\infty, \end{cases}$$

et

$$(\varphi_+^\infty, \psi_+^\infty) := \begin{cases} S^\infty(\varphi, \psi) & \text{si } \lim\limits_n \dfrac{t_n}{h_n} = +\infty \\ \Omega_+^\infty(\varphi, \psi) & \text{si } \lim\limits_n \dfrac{t_n}{h_n} = 0 \\ (\varphi, \psi) & \text{si } \lim\limits_n \dfrac{t_n}{h_n} = \infty. \end{cases}$$

Le résultat principal de ce travail est le suivant.

Théorème 2.2. *Soit $\underline{v}$ une onde linéaire concentrée de donnée $(\varphi, \psi, \underline{h}, \underline{x}, \underline{t})$. On note par $\underline{v}_\pm^\infty$ et $\underline{u}$ les ondes respectivement linéaires et non-linéaires concentrées qui lui sont associées. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. On suppose que x_∞ et I sont telles que $(\mathcal{H}_\mathcal{G})(\mathbf{I}, x_\infty)$ soit satisfaite, alors pour tout compact $K \subset I$, on a*

(i) $\overline{\lim\limits_n} |||u_n - v_{n,-}^\infty|||_{K_{n,\lambda}^-} \to 0\,;\ \lambda \to +\infty,$

(ii) $\overline{\lim_n} |||u_n - v^{\infty}_{n,+}|||_{K^+_{n,\lambda}} \to 0\,;\, \lambda \to +\infty,$
où $K^{\pm}_{n,\lambda} = \{t \in K / \pm(t_\infty - t) \leq -\lambda h_n\}$.

Remarques.

1) Contrairement aux résultats de [1] concernant le cas constant, les affirmations du théorème 2.2 sont locales en temps. Ceci est dû au caractère local des estimations de Strichartz dans le cas variable (pour un énncé précis de ces inégalités, voir [5] dans le cas constant et [7] dans le cas variable).

2) L'hypothèse géométrique $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}})(\mathbf{I}, x_\infty)$ tient compte du fait que si A est une métrique à coefficients variables, la solution linéaire $\underline{v}$ peut se concentrer (éventuellement plusieurs fois) entre les instants $t = 0$ et $t = t_\infty$.

L'hypothèse $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}})(\mathbf{R}\backslash\{t_\infty\}, x_\infty)$ est trivialement vérifiée lorsque la métrique est plate, car les géodésiques dans ce cas sont les droites issues de x_0 qui ne se recollent jamais. Nous généralisons ce résultat pour une classe plus vaste de métriques A. Dans le cas d'une variété riemannienne quelconque, l'exemple de la sphère S^{d-1} montre qu'il existe des intervalles I pour lesquels $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}})(\mathbf{I}, x_\infty)$ n'est pas satisfaite. Dans le cas général, il suffit de supposer que l'instant de concentration t_∞ est assez petit pour que $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}})(\mathbf{I}, x_\infty)$ soit vérifiée (il s'agit d'une propriété de l'application exponentielle).

3) L'énoncé du théorème précédent ne précise pas le comportement de l'onde non-linéaire concentrée $\underline{u}$ autour du temps de concentration t_∞. Néanmoins, dans sa preuve nous étudierons $\underline{u}$ pour les temps $t \in [t_\infty - \lambda h_n, t_\infty + \lambda h_n]$. Ceci nous amènera à déduire le résultat suivant.

Corollaire 2.1. *L'onde non-linéaire concentrée* $\underline{u}$ *est bornée dans l'espace* $L^{p_c}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))$.

4) Dans un travail récent, I. Gallagher et P. Gérard [2] ont traité le cas où l'équation est définie à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe. Ils ont démontré un théorème de structure pour les solutions de (1) analogue à celui de [1].

Les théorèmes 2.1 et 2.2 permettent, d'une façon analogue à [2], de prouver un théorème de structure pour la suite $\underline{u}$ solution de (1). Précisément nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et à une extraction près, on a pour tout* $\ell \geq 1$

$$u_n(t,x) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n^{(j)}}} u_n^{(j)} + k_n^{(\ell)}(t,x) + r_n^{(\ell)}(t,x),$$

où $\underline{u}^{(j)}$ *est l'onde non-linéaire concentrée associée à* $\underline{v}^{(j)}$ *avec pour tout* $0 \leq T < \delta$,

$$\overline{\lim_{n}} \Big(\sup_{t \in [0,T]} \|\nabla_{t,x} r_n^{(\ell)}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|r_n^{(\ell)}\|_{L^5([0,T],L^{10}(\mathbb{R}^3))} \Big) \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ \ell \to +\infty.$$

Références

[1] H. Bahouri and P. Gérard : *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations,* American Journal of Mathematics, **121** (1999), 131–175.

[2] I. Gallagher and P. Gérard : *Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle,* Prépublication de l'Université de Paris-Sud (Orsay) (2000), et à paraître dans J. Math. Pures Appl.

[3] P. Gérard : *Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev,* ESAIM Control Optim. Calc. Var., **3** (1998), 213–233.

[4] P. Gérard : *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations,* J. Func. Anal., **141** (1996), 60–98.

[5] J. Ginibre and G. Velo : *Generalized Strichartz inequalities for the wave equations,* Journal of Functional Analysis **133** (1995), 50–68.

[6] S. Ibrahim et M. Majdoub : *Existence globale de solutions pour l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables,* Compte-Rendu de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, **328** (1999), 579–584.

[7] L.V. Kapitanski : *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality,* Leningrad Math. Journ., **1** # 10 (1990), 693–726.