Solutions en grand temps de l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables

par

Slim Ibrahim[1]
slim.ibrahim@fsb.rnu.tn
et
Mohamed Majdoub[1]
mohamed.majdoub@fsb.rnu.tn

Résumé. -Dans ce travail, on s'intéresse à l'existence globale de solutions classiques et au sens de Shatah-Struwe de l'équation des ondes critique à coefficients variables en dimension d d'espace

$$(\mathbf{E}) \qquad \square_A u + \mid u \mid^{\frac{4}{d-2}} u = \partial_t^2 u - div(A(x).\nabla_x u) + \mid u \mid^{\frac{4}{d-2}} u = 0, \quad I\!\!R_t \times I\!\!R_x^d,$$

où A est une fonction $\mathcal{C}^2$ bornée à valeurs dans les matrices $d \times d$ définies positives.

Solutions in large time for the critical non-linear wave equation in variable coefficients

Abstract. -In this work, we study the existence of both global smooth and Shatah-Struwe's solutions of the critical wave equation in variable coefficients in dimension d of space

$$(\mathbf{E}) \qquad \square_A u + \mid u \mid^{\frac{4}{d-2}} u = \partial_t^2 u - div(A(x).\nabla_x u) + \mid u \mid^{\frac{4}{d-2}} u = 0, \quad I\!\!R_t \times I\!\!R_x^d,$$

where A is a $\mathcal{C}^2$ bounded function valued in the space of $d \times d$ positive definite matrix.

Classification *AMS*:

[1]Faculté des Sciences de Bizerte, Département de Mathématiques,
Zarzouna 7021, Bizerte, Tunisie.

1 Introduction

L'objectif de ce papier est d'établir des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème de Cauchy associé à l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables en dimension $d \geq 3$

$$\Box_A u + \mid u \mid^{p_c - 1} u := \partial_t^2 u - \mathrm{div}(A(x).\nabla_x u) + \mid u \mid^{p_c-1} u = 0; \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d, \tag{1}$$

où $p_c = \frac{d+2}{d-2}$, A est une fonction $\mathcal{C}^2$ bornée à valeurs dans les matrices $d \times d$ symétriques, et vérifiant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}) \qquad \left\{ c_0 \mid \xi \mid^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq c_0^{-1} \mid \xi \mid^2, \quad \forall \quad x, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \right.$$

pour une constante $0 < c_0 \leq 1$ fixée. L'opérateur $\mathrm{div}(A(x)\nabla.)$ représente alors une perturbation en espace de l'opérateur Laplacien Δ_x.
Lorsque $A(x) \equiv Id$, cas constant, nous retrouvons l'opérateur d'Alembertien $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$.
L' équation (1) est un cas particulier d'une classe plus générale d'équations du type

$$\Box_A u + \mid u \mid^{p-1} u = 0, \tag{2}$$

où p est un réel dans $]1, +\infty[$.
La question d'existence globale de solutions pour le problème de Cauchy associé à l'équation (2) est fondamentale. Elle a fait l'objet de nombreux travaux depuis les années soixantes. Rappelons d'abord les résultats dans le cas constant.
- Pour $1 < p < p_c$, cas sous-critique, J. Ginibre et G. Velo [5] ont démontré que pour des données

$$(u(0), \partial_t u(0)) \in (\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d)) \times L^2(\mathbb{R}^d),$$

il existe une unique u,

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)),$$

solution forte du problème de Cauchy associé à l'équation (2).
- Pour $p = p_c$, cas critique, ce problème a d'abord été résolu dans le cas radial par M. Struwe [16], puis dans le cas général par M. Grillakis [7] , [8] pour la dimension d tel que $3 \leq d \leq 5$ et récemment J. Shatah-M. Struwe [14], [15] l'ont prouvé pour les autres dimensions. Précisément, nous avons l'existence globale et l'unicité de solutions dans la classe dite de Shatah-Struwe

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^{p_c}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d)).$$

La condition inhabituelle, $u \in L^{p_c}_{loc}(I\!R, L^{2p_c}(I\!R^d))$, permet de considérer le terme $| u |^{p_c-1} u$ dans (1) comme un terme source dans $L^1_{loc}(I\!R, L^2(I\!R^d))$ et d'obtenir des estimations d'énergie.
La question d'existence de solutions dans $\mathcal{C}(I\!R, \dot{H}^1(I\!R^d)) \cap \mathcal{C}^1(I\!R, L^2(I\!R^d))$ et non pas dans $L^{p_c}_{loc}(I\!R, L^{2p_c}(I\!R^d))$ est encore ouverte. Cependant H. Bahouri et P. Gérard [1] ont montré la stabilité des solutions de Shatah-Struwe.
- Pour $p > p_c$, cas sur-critique, le problème d'existence et d'unicité de solutions fortes est ouvert. Pour une bibliographie détaillée, voir C. Zuily [17].
Dans le cas variable, L. V. Kapitanski [11], [10] a établit l'existence globale de solutions fortes pour les puissances sous critiques.
Dans ce travail nous nous intéressons au cas où $p = p_c$. Le premier résultat concerne l'existence globale de solutions régulières. Précisémment nous montrons les résultats énoncés dans [9].

Théorème 1.1 *On suppose que $3 \leq d < 6$, et que la fonction $A(x)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H})$. Alors si $s > \frac{d}{2} + 2$ et $(\varphi; \psi) \in H^s(I\!R^d) \times H^{s-1}(I\!R^d)$, le problème*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Box_A u + | u |^{p_c-1} u & = & 0 \\ u(0,.) & = & \varphi \\ \partial_t u(0,.) & = & \psi, \end{array} \right. \tag{3}$$

admet une unique solution globale $u \in C^2([0, +\infty[\times I\!R^d)$.

Remarques
1) La restriction sur la dimension est dûe à l'utilisation de l'injection de Sobolev $W^{m,\frac{2d}{d-2}}(I\!R^d) \hookrightarrow L^\infty(I\!R^d)$ pour $m > \frac{d}{2} - 1$.
2) La preuve du théorème 1.1 est basée sur un résultat de base d'existence locale et d'explosion qu'on trouve par exemple dans A. Majda [13].

Théorème 1.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, le problème (3) admet une unique solution classique maximale u définie sur $[0, T^*[\times I\!R^d$ avec l'une de deux alternatives suivantes*
(i) $T^* = +\infty$
(ii) $T^* < +\infty$ et, $\overline{\lim_{t \to T^*}} \| u(t,.) \|_{L^\infty(I\!R^d)} = +\infty$.

La preuve du théorème 1.1 se fait par l'absurde, en montrant des estimations L^∞ sur la solution maximale u. Pour ce faire, nous adoptons malgré sa rigidité, la méthode de J. Shatah-M. Struwe [14]. Cette méthode s'appuie sur un résultat clé, exprimant la non concentration de la partie non linéaire de l'énergie (et par suite de l'énergie). L'idée consiste à exhiber des hypersurfaces de $I\!R_t \times I\!R^d_x$ dépendant de la géométrie de l'opérateur $\Box_A$ et qui jouent, dans le cas constant, le même rôle

que les cônes d'ondes usuels. Ce résultat sera souvent utilisé avec les estimations à priori suivantes, vérifiées par la solution du problème linéaire.
Soit $T > 0$, $s \in I\!R$ et notons par v la solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + A(t)v = g(t); \quad [0,T] \times I\!R^d \\ v(0) = \varphi \\ \partial_t v(0) = \psi, \end{cases} \tag{4}$$

où $g(t) \in L^1([0;T]; H^s(I\!R^d))$ et $A(t)$ est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 2 dépendant d'une manière $\mathcal{C}^\infty$ en t, ayant un symbole principal a_2 vérifiant $a_2(t,x,\xi) \geq c_0 \mid \xi \mid^2$, et tel que tous les termes $a_{2-j}, j = 0, 1, \ldots\ldots$, du développement asymptotique $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{2-j}$ sont indépendants de x en dehors d'une boule fixe de $I\!R^d$. Alors nous avons

Lemme 1.1 ([Estimation de l'énergie.]) *Soit $(\varphi, \psi) \in H^{s+1} \times H^s$. Le problème (1.4) admet une unique solution v satisfaisant*

$$\sup_{t \in [0,T]} (\|\partial_t v(t)\|_{H^s} + \|\nabla v(t)\|_{H^s}) \leq c(s)(\|\psi\|_{H^s} + \|\nabla \varphi\|_{H^s} + \int_0^T \|g(t)\|_{H^s} dt), \tag{5}$$

où la costante $c(s) > 0$ est indépendante de φ, ψ, g.

Lemme 1.2 ([Inégalités de Strichartz.]) *Pour tout $T > 0$ et pour tout couple de Strichartz (q,r) i.e*

$$(\mathcal{S}) \qquad \frac{1}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2} - 1, \quad q \geq \frac{d+1}{d-1} \quad \text{et } q > 2 \text{ si } d = 3$$

la solution v du problème (4) vérifie

$$\|v\|_{L^q([0,T], L^r(I\!R^d))} \leq c_q(\|\psi\|_{L^2(I\!R^d)} + \|\nabla \varphi\|_{L^2(I\!R^d)} + \int_0^T \|g(t)\|_{L^2(I\!R^d)} dt), \tag{6}$$

avec une constante universelle c_q.

Ces dernières estimations sont appelées les inégalités de Strichartz. Elles ont été établies par Ginibre-Velo [6] dans le cas constant, et Kapitanski [11] dans le cas général.
Dans notre second résultat, nous nous intéressons aux solutions fortes au sens de Shatah-Struwe. Précisémment, nous montrons le

Théorème 1.3 *Soient $d \geq 3$ et $(\varphi; \psi) \in \dot{H}^1(I\!R^d) \times L^2(I\!R^d)$. L'équation (1) admet une unique solution u,*

$$u \in \mathcal{C}(I\!R, \dot{H}^1(I\!R^d) \cap L^{p_c}_{loc}(I\!R, L^{2p_c}(I\!R^d)); \partial_t u \in \mathcal{C}(I\!R, L^2(I\!R^d))$$

vérifiant $u(0,.) = \varphi$; $\quad \partial_t u(0,.) = \psi$.

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes. D'abord nous montrons , par une méthode de point fixe, l'existence locale d'une solution au sens de Shatah-Struwe. Puis nous prouvons l'unicité de telles solutions comme dans [15]. Enfin, en utilisant le lemme fondamental et une certaine décroissance de l'énergie, nous prolongeons la solution locale.

Remarque 1.1 *Par souci de clarté et pour ne pas alourdir le texte nous allons supposer, dans toute la suite, que A est une fonction régulière à valeurs dans les matrices $d \times d$ symétriques, et vérifiant*

$$(\mathcal{H}') \qquad \begin{cases} c_0 \mid \xi \mid^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq c_0^{-1} \mid \xi \mid^2, \quad \forall \xi \in I\!R^d \\ A(x) \equiv Id, \quad \forall x \in I\!R^d, \mid x \mid \geq R_0, \end{cases}$$

pour des constantes $R_0 > 0$ et $0 < c_0 \leq 1$ données. Nous donnerons en appendice les justifications nécessaires.

Le reste de ce papier est organisé comme suit.
Dans la première partie, nous rappellons les notions géométriques nécessaires à l'introduction des cônes géodésiques. Dans la seconde partie, un calcul précis sur ces cônes permet d'établir le lemme fondamental, et par suite l'existence globale en temps de solutions classiques. La troisième partie est consacrée à la preuve du théorème 1.3. En appendice nous détaillerons les points suivants.
- Localisation des estimations de Strichartz dans les cônes géodésiques.
Dans cet appendice, nous établissons une version localisée des inégalités (6). La preuve est basée sur une idée de Bahouri-Gérard.
- Unicité précisée.
On montrera l'unicité des solutions de l'équation $\Box_A u = f$ dans des cônes géodésiques rétrogrades.
- Une remarque sur la métrique A.
Nous détaillerons la remarque **1.1**.

2 Cônes géodésiques

Notons par $a_{ij}(x)$ les coefficients de la matrice $A(x)$ et par $a^{ij}(x)$ ceux de $A^{-1}(x)$. Nous munissons $I\!R^d$ de la métrique Riemannienne g définie à partir de la matrice $A^{-1}(x)$ par

$$g = \sum_{ij} a^{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Pour tout point $x \in I\!R^d$, et tous vecteurs $u, v \in T_x I\!R^d$, nous noterons par $g_x(u, v)$ le produit scalaire $< A^{-1}(x)u, v >$ et par $\|.\|_x$ la norme correspondante. Nous rappellons que la longueur d' une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow I\!R^d$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est

$$L(\gamma) = \int_{[a,b]} \|\gamma^{'}(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

La distance géodésique de deux points x et y, notée $d_g(x, y)$, est donnée par l' infinimum des longueurs des courbes joignant ces deux points.

2.1 Application exponontielle

On rappelle que les géodésiques de $(I\!R^d, g)$ sont les courbes qui, en coordonnées locales, sont régies par le système d'équations

$$\ddot{x}^k(t) + \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j g^{kl}(x(t))(2\partial_i g_{jl}(x(t)) - \partial_l g^{ij}(x(t))) = 0; \quad k = 1, 2, ..., d. \tag{7}$$

Pour $x \in I\!R^d$ et $v \in T_x I\!R^d$ notons par C_v la géodésique vérifiant $C_v(0) = x$ et $\dot{C}_v(0) = v$. L'application exponentielle en x est

$$\exp_x \ : \quad T_x I\!R^d \longrightarrow I\!R^d, \quad v \longrightarrow C_v(1).$$

Cette application n'est pas à priori bien définie. Mais vu l'homogénéité de (7), nous avons (voir par exemple [4])

Lemme 2.1 *Pour tout $x \in I\!R^d$, il existe $\varepsilon > 0$ et U_x un voisinage de x dans $I\!R^d$ tels que l'application*

$$\exp_x \ : V_x = \{w, \ \|w\|_x < \varepsilon\} \longrightarrow U_x$$

soit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme et,

$$\forall y \in U_x, \ d_g(x, y) = \| \exp_x^{-1}(y)\|_x. \tag{8}$$

Cette application vérifie les propriétés décrites dans le résultat suivant connu sous le nom du lemme de Gauss.

Lemme 2.2 ([Lemme de Gauss.]) *Soit* $x \in I\!R^d$, *et* V_x *le voisinage donné par le lemme 2.1. Nous avons alors*

$$D\exp_x(0)v = v, \ \textit{pour tout } v \in T_x R^d, \tag{9}$$

$$\|D\exp_x(v).v\|_{\exp_x(v)} = \|v\|_x, \ \textit{pour tout } v \in V_x, \tag{10}$$

$$\textit{si } g_x(v,w) = 0 \ \textit{alors } g_{\exp_x(v)}(D\exp_x(v)v, D\exp_x(v)w) = 0 \tag{11}$$

On renvoie à [4], (Proposition 2.93), pour les détails et les démonstration des résultats ci dessus.
Les identités (1.10) et (1.11) du lemme 2.2 traduisent le fait que $D\exp_x(v)$ est une isométrie dans la direction de v .
En tout point $x_0 \in R^d$, nous définissons l'application φ_{x_0} par $\varphi_{x_0}(x) = d_g(x, x_0)$.
Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 2.1 *Soit* $x_0 \in I\!R^d$. *Il existe un voisinage* U_{x_0} *tel que l'application* $\varphi_{x_0} \in C^\infty(U_{x_0}\setminus (x_0), I\!R_+^*)$ *et*

$$A(x)\nabla\varphi_{x_0}.\nabla\varphi_{x_0} = 1; \quad U_{x_0} \setminus (x_0), \tag{12}$$

$$div(\varphi_{x_0}A(x)\nabla\varphi_{x_0}) = d + O(\varphi_{x_0}), \tag{13}$$

$$B(x) := A(x)\nabla(\varphi_{x_0}^t\nabla\varphi_{x_0}) - Id = O(\varphi_{x_0}), \tag{14}$$

$$c(x_0) \mid x - x_0 \mid \leq \varphi_{x_0}(x) \leq c^{-1}(x_0) \mid x - x_0 \mid . \tag{15}$$

$c(x_0)$ *est une constante positive.*

Démonstration de la proposition 2.1. Nous supposons que $x_0 = 0$, et nous prennons U_0 le voisinage de 0 donné par le lemme 2.2.
Comme pour tout $x \in U_0$, $\varphi_0(x) = \| \exp_0^{-1}(x)\|_0$ alors $\varphi_0 \in C^\infty(U_0\setminus (0), I\!R_+^*)$. Soit $v \in V_0$, alors pour tout $t > 0$, assez proche de 1, nous avons en vertu de (8)

$$\varphi(\exp_0(tv)) = t\|v\|_0. \tag{16}$$

En différentiant (2.16) par rapport à t, et en prenant $t = 1$, nous avons

$$D\varphi(\exp_0(v))D\exp_0(v)v = \|v\|_0. \tag{17}$$

Par ailleurs, pour tout $v \in V_0$ nous avons $\varphi(\exp_0(v)) = \|v\|_0$. En différentiant l'égalité précédente par rapport à v et en l'appliquant à $w \in v^{\perp}$ (i.e $g_0(w, v) = 0$) on obtient

$$< D\varphi(\exp_0(v))D\exp_0(v), w >= 0. \tag{18}$$

Si nous notons par $\tilde{\nabla}$ le gradient défini sur $(I\!R^d, A^{-1}(x))$, les expressions (17) et (18) sont équivalentes à

$$g_x(\tilde{\nabla}\varphi(\exp_0(v)), D\exp_0(v)v) = \|v\|_0, \tag{19}$$

$$g_x(\tilde{\nabla}\varphi(\exp_0(v)), D\exp_0(v)w) = 0. \tag{20}$$

D'aprés (10) et (11) du lemme 2.2 nous avons,

$$\tilde{\nabla}\varphi(\exp_0(v)) = \frac{D\exp_0(v).v}{\|v\|_0} \ et \ \|\tilde{\nabla}\varphi(\exp_0(v)\|_{\exp_0(v)} = 1. \tag{21}$$

Comme $\tilde{\nabla} = A(x)\nabla$, l'assertion (12) est démontrée.
Pour prouver (13), notons par $\psi(v)$ l'appliquation $(\varphi A\nabla\varphi)(\exp_0(v))$ définie sur le voisinage V_0. D'aprés (21) nous avons $\psi(v) = D\exp_0(v).v$. Donc $\mathrm{div}(\psi)(v) - d = \mathrm{div}(\psi)(v) - \mathrm{div}\psi(0) = O(\|v\|_0) = O(\varphi)$. D'autre part, $\mathrm{div}_x(\varphi A\nabla\varphi)(0) = d$, et par la formule de Taylor $\mathrm{div}_x(\varphi A\nabla\varphi)(x) - d = O(\|x\|)$, d'où (13) en vertu de (15).
Pour la preuve de (14), nous écrivons

$$A\nabla(\varphi^t\nabla\varphi) - Id = A\nabla[^t(\varphi A\nabla\varphi)A^{-1}] - Id, \tag{22}$$

or $(\varphi A\nabla\varphi)(x) = D\exp_0(v).v$ avec $x = \exp_0(v))$, ce qui entraîne que

$$A\nabla[(\varphi A\nabla\varphi)A^{-1}(0) = Id. \tag{23}$$

Un raisonnement analogue à celui fait dans la preuve de (13) donne le résultat.
Enfin, la preuve de (16) découle du fait que l'application $\exp_0$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomophisme et de la formule de Taylor. ■

Commentaires

1) Dans le cas constant, pour tout $x_0 \in I\!R^d$, nous avons $U_{x_0} = I\!R^d$ et $\varphi_{x_0}(x) = | x - x_0 |$.

2) Nous constatons comme dans [2] que les géodésiques de la variété Riemannienne $(I\!R^d, A^{-1}(x))$ sont en fait les rayons (projection en (t,x)) des bicaractéristiques nulles du champ Hamiltonien associé au symbole principal de $\Box_A$ définies par les solutions de

$$\dot{x}(t) = 2A(x)\xi,\ \dot{\xi} = -\nabla_x(a_{ij}\xi^i\xi^j),\ \dot{t} = -2\tau,\ \dot{\tau} = 0,$$

$$t(0) = t_0,\ x(0) = x_0,\ \tau(0) = \tau_0,\ \xi(0) = \xi_0,$$

issues des points $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ tel que $A(x_0)\xi_0.\xi_0 = \tau_0^2$ de l'espace cotangent $T^*(I\!R_t \times I\!R_x^d)$. En effet, toute géodésique $(-2t, x(-2t))$ est un rayon de la bicaractéristique nulle $\Gamma = (-2t, x(-2t), 1, \frac{1}{2}A^{-1}(x(t))\dot{x(t)})$ et réciproquement.
Les solutions de (7) sont globales ce qui fait de $I\!R^d$ une variété Riemannienne complète.

3) L'hypersurface de $I\!R^d$ définie par $\{(t,x)/t^2 = \varphi_0^2(x)\}$ est tissée de géodésiques. Pour tout point $z_0 = (t_0, x_0) \in [0, +\infty[\times I\!R^d$, nous appellerons cône géodésique issu de z_0, l'ensemble des points (t,x) tels que $\varphi_{x_0}^2(x) \leq (t - t_0)^2$ et $x \in U_{x_0}$. Introduisons maintenant les notations suivantes.

2.2 Notations

Soit $Q \subset I\!R \times I\!R^d$, nous désignerons par

$K(z_0) := \{z = (t,x) \in [0, +\infty[\times U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) \leq t_0 - t\}$ Le cône retrograde

$\tilde{K}(z_0) := \{z = (t,x) \in [0, +\infty[\times U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) \leq t - t_0\}$ Le cône d'avenir

$M(z_0) := \{z = (t,x) \in [0, +\infty[\times U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) = t_0 - t\}$ Le manteau

$D(t, z_0) := \{x \in U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) \leq t_0 - t\}$ La section du cône à l'instant t

$$Q_S^T := \{z = (t,x) \in Q \text{ tel que } S \leq t \leq T\}$$

$$e(u) := \frac{1}{2}(u_t^2 + \mid A^{\frac{1}{2}} \nabla_x u \mid^2) + \frac{1}{p_c+1} u^{p_c+1} \text{ La densité d'énergie}$$

L'énergie locale de u à l'instant t est

$$E(u, D(t,z_0)) := \int_{D(t,z_0)} e(u)dx = E_0(u, D(t,z_0)) + \int_{D(t,z_0)} \frac{u^{p_c+1}}{p_c+1} dx$$

$$d_{z_0}(u) := \frac{1}{\sqrt{1+ \mid \nabla\varphi_{x_0} \mid^2}} [\frac{\mid u_t A^{\frac{1}{2}} \nabla\varphi_{x_0} - A^{\frac{1}{2}} \nabla u \mid^2}{2} + \frac{u^{p_c+1}}{p_c+1}] \text{ La densité de flux}$$

$$\mathrm{Flux}(u, M_S^T(z_0)) := \int_{M_S^T(z_0)} d_{z_0}(u)\, d\sigma \quad \text{Le flux}$$

$$\|u\|^q_{L^q(L^r(Q))} := \int_{\pi_t(Q)} (\int_{Q_t} \mid u(t,x) \mid^r dx)^{\frac{q}{r}} dt$$

où $Q_t = \{x, (t,x) \in Q\}$ et $\pi_t : I\!R_t \times I\!R^3_x \longrightarrow I\!R_t$ est la première projection.

3 Existence globale de solutions classiques

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de prouver le théorème 1.1. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Pour simplifier, toutes les preuves de ce paragraphe sont données en dimension $d = 3$.
Soient $d \geq 3$, $p_c = \frac{d+2}{d-2}$, $z_0 = (t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times I\!R^d$, et $u \in \mathcal{C}^2(K(z_0) \setminus z_0)$ une solution classique de (1).

3.1 Estimation de l'énergie

Lemme 3.1 *Pour tous réels a et b tels que* $0 \leq a < b < t_0$, *on a*

$$E(u, D(b, z_0)) + \mathit{Flux}(u, M_a^b(z_0)) = E(u, D(a, z_0)).$$

Démonstration du lemme 3.1. Nous multiplions l'équation par $\partial_t u$ nous obtenons $0 = \partial_t e(u) - \mathrm{div}_x(\partial_t u.A\nabla_x u)$ puis nous intègrons sur le cône tronqué K_a^b. Le résultat est alors une conséquence de la formule de Stokes. ∎

Conséquences
1) La quantité $E(u, D(a, z_0))$ est décroissante en a. Comme elle est positive, sa limite en t_0 existe, et alors $\lim_{a \nearrow t_0} \mathrm{Flux}(u, M_a^{t_0}(z_0)) = 0$
2) D'aprés l'inégalité de Hölder et (16), nous pouvons voir que si $\alpha < 2$ et $\beta < p_c + 1$,on a

$$\lim_{a \nearrow t_0} \int_{D(a,z_0)} (u_t^\alpha + \mid A^{\frac{1}{2}} \nabla_x u \mid^\alpha) dx \quad = \quad \lim_{a \nearrow t_0} \int_{D(a,z_0)} \mid u \mid^\beta dx \quad = 0$$

et la question naturelle que nous posons est peut on étendre ces résultats pour $\alpha = 2$ ou $\beta = p_c + 1$ c'est à dire lorsqu'il s'agit de termes d'énergie. La réponse est dans ce qui suit.

3.2 Le lemme fondamental

Lemme 3.2 *Pour tous réels a et b tels que* $0 < a < b < t_0$, *on a*

$$\int_{D(a,z_0)} \mid u(a,x) \mid^{p_c+1} \ dx \ \leq C_0(A)\{\frac{t_0 - b}{t_0 - a}(E(u, D(a, z_0)) + E^{\frac{d-2}{d}}(u, D(a, z_0)))+$$

$$E(u, D(a, z_0)) - E(u, D(b, z_0)) + [E(u, D(a, z_0)) - E(u, D(b, z_0))]^{\frac{d-2}{d}} +$$

$$(b - a)(E(u, D(a, z_0)) + E^{\frac{d-2}{d}}(u, D(a, z_0)))\},$$

où $C_0(A)$ *est une constante dépendant de la métrique A.*

Démonstration du lemme 3.2. Nous prenons $z_0 = (0, 0)$, et nous notons par φ la fonction φ_0, par $D(t)$ le disque $D(t, 0)$ et par $E(t)$ l'energie locale $E(u, D(t))$. Quitte à inverser le temps, et conserver les mêmes notations nous pourrons travailler dans le cône d'avenir. Nous multiplions l'équation (1) par $L_\varphi u$ où

$$L_\varphi = t\partial_t + \varphi A\nabla\varphi.\nabla + 1,$$

est tangentiel au cône géodésique issue du point $(0, 0)$. Nous obtenons alors

$$0 = \partial_t q + \mathrm{div}_x P + R, \tag{24}$$

où l'on a posé

$$q(t,x) = t[\frac{1}{2} \mid \frac{L_\varphi u}{t} \mid^2 + \frac{A\nabla u.\nabla u - \frac{\varphi^2}{t^2}(A\nabla\varphi\nabla u)^2}{2} + \frac{u^6}{6}] + \frac{u^2}{t},$$

$$P = [-\frac{(\partial_t u)^2}{2} + \frac{A\nabla u.\nabla u + \frac{u^2}{t^2} - 2\partial_t u\frac{u}{t}}{2} + \frac{u^6}{6}]\varphi A\nabla\varphi - L_\varphi u A\nabla u,$$

$$R = (3 - \mathrm{div}_x(\varphi A\nabla\varphi))[\frac{A\nabla u.\nabla u}{2} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^2}{2t^2} - \frac{(\partial_t u)^2}{2} - \partial_t u\frac{u}{t}] + B(A\nabla u).\nabla u+$$

$$\varphi \sum_{i,j,k,l} a_{kl}\partial_k(a_{ij})\partial_i u(\partial_j\varphi\partial_l u - \partial_l\varphi\frac{\partial_j u}{2}) + \frac{u^6}{3} = I + II + III + IV.$$

La fonction matricielle B du terme II est celle donnée par (14).

En intégrant (24) sur le cône tronqué $\tilde{K}_a^b$, et en utilisant les résultats de la proposition 2.1 nous obtenons

$$Q(b) - Q(a) + \int_{\tilde{M}_a^b} (-q + \nabla\varphi.p)\frac{d\sigma}{\sqrt{1+ \mid \nabla\varphi \mid^2}} + \int_{\tilde{K}_a^b} R\, dxdt = 0, \tag{25}$$

avec $Q(s) = \int_{D(s)} q(s,x)dx$. Par ailleurs sur le manteau $\tilde{M}_a^b$ nous avons, en vertu de la proposition 2.1, $(q - \nabla\varphi.p) = t \mid \frac{L_\varphi u}{t} \mid^2$ ce qui permettra de réecrire (25)

$$Q(b) - Q(a) - \int_{\tilde{M}_a^b} t \mid \frac{L_\varphi u}{t} \mid^2 \frac{d\sigma}{\sqrt{1+ \mid \nabla\varphi \mid^2}} + \int_{\tilde{K}_a^b} R\, dxdt = 0.$$

D'autre part, en utilisant (12) nous obtenons

$$\int_{D(t)} | u(t,x) |^6 \ dx \leq C\frac{1}{t}Q(t) \leq C(E(t) + E^{\frac{1}{3}}(t)),$$

et

$$\int_{\tilde{M}_a^b} t \mid \frac{L_\varphi u}{t} \mid^2 \frac{d\sigma}{\sqrt{1+ \mid \nabla\varphi \mid^2}} \leq \int_{\tilde{M}_a^b} [2b(\frac{\mid u_t A^{\frac{1}{2}}\nabla\varphi + A^{\frac{1}{2}}\nabla u \mid^2}{2}) + 2\frac{u^2}{t}]\frac{d\sigma}{\sqrt{1+ \mid \nabla\varphi \mid^2}},$$

$$\leq Cb[E(b) - E(a) + (E(b) - E(a))^{\frac{1}{3}}].$$

La dernière inégalité est une conséquence de l'inégalité de Hölder et de la condition (15).
Il reste à estimer le reste R. En utilisant (13), (14) et (15) nous avons

$$\int_{\tilde{K}_a^b} \mid I \mid dxdt \leq Cb(b-a)(E(b) + E(b)^{\frac{1}{3}})$$

et

$$\int_{\tilde{K}_a^b} \{\mid II \mid + \mid III \mid\} \ dxdt \leq Cb(b-a)E(b)$$

ce qui, en vertu du signe de IV, achève la preuve du lemme 3.2. ■

Corollaire 3.1

$$\lim_{b \nearrow t_0} \int_{D(b)} \mid u(b,x) \mid^{p_c+1} \ dx = 0. \tag{26}$$

Démonstration du corollaire 3.1. Supposons que $z_0 = (0,0)$ et prenons $a = \varepsilon b$ dans le lemme 3.2. En passant à la limite quand b tend vers 0 on obtient

$$\lim_{b \longrightarrow 0} \int_{D(b)} \mid u(b,x) \mid^6 \ dx \leq C\varepsilon, \ \forall 0 < \varepsilon < 1.$$

■

Remarques
1) Le corollaire précédent montre que la partie non linéaire de l'énergie ne présente pas des effets de concentration. Nous montrons par la suite qu'en fait cela est vrai pour toute l'énergie.

2) Nous pouvons obtenir le même résultat du lemme 3.2 dans des cônes rétrogrades. En effet, il suffit de remarquer que si $\tilde{u}$ est solution de (1) dans $\tilde{K}(z_0) \setminus z_0$ alors $u(t,x) = \tilde{u}(t_1 - t - t_0, x)$ est solution dans $K(z_1) \backslash z_1$ où $z_0 = (t_0, x_0)$ et $z_1 = (t_1, x_1)$.

Corollaire 3.2 *Soit (q, r) un couple de Strichartz vérifiant (**S**).*
Alors $u \in L^q(L^r(K_0^{t_0}))$.

Démonstration du corollaire 3.2. Dans cette preuve, nous utilisons une version localisée des inégalités (6) dans des cônes tronqués $K_s^{t_0}(z_0)$. En effet toute solution v du problème linéaire (3) satisfait (voir appendice)

$$\|v\|_{L^q(L^r(K_s^{t_0}))} \leq c[E^{\frac{1}{2}}(v, D(s, z_0)) + \int_s^{t_0} \|\Box_A v\|_{L^2(D(t,z_0))}\, dt] \text{ où } q > 2;\ \frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}.$$

En considérant le terme $| u |^4 u$ comme un terme source dans l'inégalité précédente, nous avons

$$\|u\|_{L^q(L^r(K_s^{t_0}(z_0)))} \leq c[E^{\frac{1}{2}}(u, D(s, z_0)) + \|u\|^5_{L^5(L^{10}(K_s^{t_0}(z_0))}]. \tag{27}$$

Pour le choix $(q, r) = (4, 12)$ dans (27) et pour s assez proche de t_0, un lemme de Boot-Strap (voir [1]) nous permet de déduire que

$$\|u\|_{L^4(L^{12}(K_s^{t_0}))} \leq c(z_0, E(u, D(s, z_0)),$$

ce qui, par interpolation des cas $(4, 12)$ et $(\infty, 6)$, permet d'obtenir le résultat. ■

Corollaire 3.3

$$\lim_{s \nearrow t_0} E(u, D(s, z_0)) = 0.$$

Démonstration du corollaire 3.3. Pour $s < t_0$ assez proche de t_0, nous prenons v_s la solution de $\Box_A v_s = 0$ avec les données de Cauchy $v_s(s) = u(s)$ et $\partial_t v_s(s) = \partial_t u(s)$. Alors la différence $w_s = u - v_s$ satisfait $\Box_A w_s = -u^5$, $w_s(s) = \partial_t w_s(s) = 0$. Nous en déduisons que pour $s < t < t_0$,
$E_0^{\frac{1}{2}}(w_s, D(t, z_0)) \leq c\|u\|_{L^5(L^{10}(K_s^{t_0}(z_0)))}$ où l'on a posé

$$E_0(w_s, D(t, z_0)) = \frac{1}{2} \int_{D(t,z_0)} [(\partial_t w_s)^2 + | \nabla w_s |^2](t, x)\, dx.$$

De l'inégalité triangulaire, nous avons

$$E_0^{\frac{1}{2}}(u, D(t, z_0)) \leq E_0^{\frac{1}{2}}(v_s, D(t, z_0)) + c\|u\|_{L^5(L^{10}(K_s^t(z_0)))}.$$

Par ailleurs, en utilisant le corollaire précédent et le fait que $E_0(v_s, D(t, z_0)) \longrightarrow 0$ quand $t \to t_0$, nous achevons la preuve de ce résultat. ■

Corollaire 3.4 *Il existe un réel s_0, $0 \le s_0 < t_0$ tel que*

$$\|u(t,x)\|_{L^\infty([s_0,t_0[,L^{p_c+1}(I\!R^d))} < +\infty.$$

Démonstration du corollaire 3.4. La preuve se fait en deux étapes.
Prémière étape: Notons par u_c la solution de Shatah-Struwe du cas constant avec les mêmes données de Cauchy (φ, ψ), et soit $\varepsilon_0 > 0$ fixé. Il existe alors un réel $R > 0$ tel que

$$\int_{|x|>R} (\|\nabla\varphi\|^2 + \|\psi\|^2)\, dx \quad \le \varepsilon_0.$$

Alors, pour tout $0 < t < t_0$ nous avons

$$\int_{|x|>R+t} \{\frac{1}{2}((\partial_t u_c)^2 + \|\nabla u_c\|^2) + \frac{(u_c)^6}{6}\}\, dx \quad \le \varepsilon_0.$$

Quitte à changer R, nous pouvons supposer que $A(x) = Id$ pour $\mid x \mid > R$. Ainsi les solutions u et u_c vérifient la même équation avec les mêmes données de Cauchy pour $\mid x \mid > R$. Par unicité précisée (voir Appendice) nous avons $u = u_c$ sur

$$\Gamma_0^{t_0}(R) = \{z = (t,x)/0 \le t \le t_0; \mid x \mid > R + t\},$$

et par suite pour tout $0 < t < t_0$ nous avons

$$\int_{|x|>R+t} \frac{1}{2}((\partial_t u)^2 + \|\nabla u\|^2) + \frac{u^6}{6}\, dx \quad \le \varepsilon_0.$$

Deuxième étape: Pour tout $y \in I\!R^3$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon_0, y)$ tel que, $0 < t_0 - t < \eta$ implique $\int_{\varphi_y(x)\le t_0 - t} e(u)(t_0 - \frac{\eta}{2}, x)\, dx \quad \le \varepsilon_0$.
De la continuité de l'application $t \longmapsto \int_{\varphi_y(x)\le t_0-t} e(u)(t_0 - \frac{\eta}{2}, x)\, dx$ au point $t_0 - \frac{\eta}{2}$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon_0, y)$ tel que $\int_{\varphi_y(x)\le \frac{\eta}{2}+\delta} e(u)(t_0 - \frac{\eta}{2}, x)\, dx \quad \le \varepsilon_0$.
En utilisant la décroissance de l'énergie (lemme 3.1) nous avons pour tout $t_0 - \frac{\eta}{2} \le t < t_0$ $\int_{\varphi_y(x)\le t_0+\delta-t} e(u)(t,x)\, dx \quad \le \varepsilon_0$. L'ensemble $K_{t_0} = \{(t_0,x)/ \mid x \mid \le R + t_0\}$ est un compact de $\{t_0\} \times I\!R^3$ et $K_{t_0} = \cup\{(t_0,x)/ \mid \varphi_y(x) - y \mid \le \delta\}$. De ce recouvrement, nous pouvons en extraire un recouvrement fini. Par suite, il existe un rélle s_0 tel que $u \in L^\infty([s_0, t_0[; L^6(I\!R^3))$. ■

Corollaire 3.5 *Supposons que $3 \le d < 6$. Alors $u \in L^{\frac{4}{d-2}}([s_0, t_0[; L^{\frac{4d}{d-2}}(I\!R^d))$.*

Démonstration du corollaire 3.5. Pour tout $j = 1, ..., n$ notons par $\bar{z_j}= (t_0+\delta_j, y_j)$. D'aprés la preuve du corollaire précédent, $u \in L^\infty(L^6(K_{s_0}^{t_0}(\bar{z_j})))$. Un raisonnement analogue à celui du corollaire 3.2 permet de conclure que $u \in L^q(L^r(K_{s_0}^{t_0}(\bar{z_j})))$ pour tout couple de Strichartz (q, r) et par suite $u \in L^q(L^r(t + R \leq | x | \leq t_0 + R)$.
Pour montrer que $u \in L^q(L^r(\Gamma_{s_0}^{t_0}(R)))$, nous appliquons les ingalités de Strichartz localisées dans ce domaine

$$\|u\|_{L^q(L^r(\Gamma_{s_0}^{t_0}(R)))} \leq C_q(R)\Big[\int_{|x|\geq R}(| \nabla u |^2 +(\partial_t u)^2)(s_0)\, dx + \|u\|_{L^5(L^{10}(\Gamma_{s_0}^{t_0}(R)))}\Big].$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, et en raisonnant comme dans le corollaire 3.2 nous avons le résultat. ■

Corollaire 3.6 *On suppose que* $3 \leq d < 6$, *alors il existe un réel* s_1, $s_0 \leq s_1 < t_0$ *tel que* $<\!D\!>^1 u$, $<\!D\!>^2 u \in L^\infty([s_1, t_0[, L^{p_c+1}(I\!R^)$, *où* $<\!D\!>^\sigma$ *désigne le multiplicateur de Fourier associé à la fonction* $(1+ | \xi |^2)^{\frac{\sigma}{2}}$.

Démonstration du corollaire 1.3.6. Remarquons que $<\!D\!>^1 u$ est solution de

$$\Box_A(<\!D\!>^1 u) + R_1 <\!D\!>^1 u+ <\!D\!>^1 u^5 = 0.$$

R_1 est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. En appliquant les inégalités (6) nous obtenons

$$\| <\!D\!>^1 u\|_{L^q([s_1,t_0[,L^r(I\!R^3))} \leq C[(E_0^{\frac{1}{2}}(<\!D\!>^1 u, s) + \| <\!D\!>^1 u^5\|_{L^1([s_1,t_0[,L^2(I\!R^3))}]. \quad (28)$$

D'après la formule de Plancherel nous pouvons écrire

$$\| <\!D\!>^1 u^5\|^2_{L^2(I\!R^3)} = \|u^5\|^2_{L^2(I\!R^3)} + c\int_{I\!R^3}\sum_{j=1}^3 | \partial_j u^5 |^2 (\xi)d\xi.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des termes nous obtenons

$$\begin{aligned} \| <\!D\!>^1 u^5\|^2_{L^2(I\!R^3)} &\leq c\|u\|^8_{L^{12}(I\!R^3)}\Big(\|u\|^2_{L^6(I\!R^3)} + \sum_{j=1}^3 \|\partial_j u\|^2_{L^6(I\!R^3)}\Big) \\ &\leq c\|u\|^8_{L^{12}(I\!R^3)}\| <\!D\!>^1 u\|^2_{L^6(I\!R^3)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Et par suite

$$\| <\!D\!>^1 u^5\|_{L^1([s,t_0[,L^2(I\!R^3))} \leq c\|u\|^4_{L^4([s,t_0[,L^{12}(I\!R^3))}\| <\!D\!>^1 u\|_{L^\infty([s,t_0[,L^6(I\!R^3))}.$$

Pour le choix $(q,r) = (\infty, 6)$ dans (27), et pour s assez proche de t_0, nous pouvons rendre la quantité $\|u\|_{L^4([s,t_0[,L^{12}(I\!R^3))}$ aussi petite que l'on veut. Ce qui achève la preuve. ■

Fin de la démonstration du théorème 1.1**.** D'après le théorème 1.2, le problème (3) admet une unique solution maximale classique définie sur $[0, T^*[$. Supposons que $T^* < +\infty$, alors $\overline{lim}_{t \to T^*} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$. Or d'aprés les corollaires 3.4 et 1.3.6 nous avons $u \in L(^\infty[s_1, t_0[, W^{1,6}(I\!R^3))$ où $W^{1,6}$ désigne l'espace de Sobolev usuel. Ce qui entraîne le résultat en utilisant l'injection de Sobolev $W^{1,6}(I\!R^3)) \hookrightarrow L^\infty(I\!R^3)$.
Pour les dimensions $4 \leq d < 6$, nous utilisons le fait que $u \in W^{2,\frac{2d}{d-2}}(I\!R^d)$. ■

4 Existence globale dans l'espace d'énergie

Nous discuttons maintenant l'existence globale et l'unicité pour des données de Cauchy dans l'espace d'énergie $\mathcal{E}= \dot{H}^1 \times L^2$. Nous avons

Théorème 4.1 *Soient* $(\varphi, \psi) \in\mathcal{E}$, $d \geq 3$ *et* $p_c = \frac{d+2}{d-2}$. *Alors le problème*

$$\Box_A u + \mid u \mid^{p_c - 1} u = 0; \quad (u, \partial_t u)(0, .) = (\varphi, \psi), \tag{30}$$

admet une unique solution u telle que

$$(u, \partial_t u) \in \{\mathcal{C}(I\!R, \dot{H}^1) \cap L^{p_c}_{loc}(I\!R, L^{2p_c})\} \times \mathcal{C}(I\!R, L^2).$$

Avant de prouver ce résultat, précisons d'abord quelques notations.

4.1 Notations

(a) Nous Noterons par v la solution de l'équation libre avec les mêmes données de Cauchy

$$\Box_A v = 0; \quad (v, \partial_t v)(0, .) = (\varphi, \psi).$$

(b) Soit $\delta_0 > 0$ défini par $p_c c 2^{p_c - 1} \delta_0^{p_c - 1} \leq \frac{1}{4}$ avec $c = max(c(0), c_{p_c})$ où les constantes $c(0)$ et c_{p_c} sont données respectivement par (5) et (6).
(c) Nous noterons par T_0 un réel positif tel que $\|v\|_{L^{p_c}([0,T_0], L^{2p_c})} \leq \delta_0$.
(d) Pour tout I, intervalle de temps compact, $\mathcal{E}(I)$ désignera l'espace

$$\mathcal{E}(I) := \{u \in \mathcal{C}(I, \dot{H}^1) \cap \mathcal{C}^1(I, L^2) \text{ et telle que } u \in L^{p_c}(I, L^{2p_c})\}.$$

(e) Pour tout $T > 0$, $\mathcal{F}_T$ désignera le sous espace de $\mathcal{E}([0, T])$ formé des éléments w vérifiant de plus $w(0, .) = \partial_t w(0, .) = 0$.
Remarques
1) Nous poserons $\|u\|_{\mathcal{E}(I)} = \sup_I(\|u(t, .)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t u(t, .)\|_{L^2}) + \|u\|_{L^{p_c}(I, L^{2p_c})}$. Muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{E}(I)}$, l'espace $\mathcal{E}(I)$ est un sous-espace de $L^\infty(I, \mathcal{E})$ qui englobe toutes les propriétés d'intégrabilité espace-temps de la solution v. Précisémment si $\|u\|_{\mathcal{E}(I)} < +\infty$, alors pour tout couple (q, r) vérifiant **(S)**, $\|u\|_{L^q(I, L^r)} < +\infty$.

2) $\mathcal{F}_{T_0}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}([0, T_0])$.

3) Une solution de (1) dans $\mathcal{E}([0, T])$ vérifie la loi de conservation de l'énergie

$$E(u, t) = \int_{I\!R^d} \{\frac{1}{2}((\partial_t u)^2 + \mid A^{\frac{1}{2}} \nabla_x u \mid^2) + \frac{1}{p_c + 1} u^{p_c + 1} \} dx = E(u, 0).$$

4) Dans la suite de cette section, nous nous limiterons à la dimension $d = 3$.

4.2 Existence locale

Proposition 4.1 *Soit T_0 donné par* (**c**). *Alors (30) admet une solution u dans $\mathcal{E}([0,T_0])$.*

Démonstration de la proposition 4.1. La preuve est basée sur une application du théorème du point fixe dans B_{δ_0}: la boule fermée de centre 0 et de rayon δ_0 de l'espace $\mathcal{F}_{T_0}$. Soit Φ l'application définie par

$$\Phi : B_{\delta_0} \longrightarrow B_{\delta_0}; \qquad w \longmapsto \tilde{w},$$

solution de

$$\Box_A \tilde{w} = -(v+w)^5 \quad \tilde{w}(0,.) = \partial_t \tilde{w}(0,.) = 0.$$

(i) Φ est bien définie: en appliquant les inégalités (5) et (6) Nous obtenons

$$\|\tilde{w}\|_{L^5([0,T_0],L^{10})} \le c\|v+w\|^5_{L^5([0,T_0],L^{10})} \le \frac{\delta_0}{10},$$

et

$$\sup_{[0,T_0]}(\|\tilde{w}(t,.)\|_{\dot{H}^1} + \|\partial_t \tilde{w}(t,.)\|_{L^2}) \le \frac{\delta_0}{10}.$$

(ii) Φ est contractante: en appliquant l'inégalité (6) nous avons

$$\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_{L^5([0,T_0],L^{10})} \le c\|(v+w_2)^5 - (v+w_1)^5\|_{L^1([0,T_0],L^2)},$$

et l'inégalité de Hölder appliquée en espace puis en temps donne

$$\begin{aligned}\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_{L^5([0,T_0],L^{10})} &\le c\|w_1 - w_2\|_{L^5([0,T_0],L^{10})}\Sigma_{j=0}^4 2^j {\delta_0}^j 2^{4-j} {\delta_0}^{4-j} \\ &\le \frac{1}{4}\|w_1 - w_2\|_{L^5([0,T_0],L^{10})}.\end{aligned}$$

L'autre partie de la norme se traite de la même facon et finalement nous obtenons

$$\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_{\mathcal{E}([0,T_0])} \le \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_{\mathcal{E}([0,T_0])}.$$

D'aprés le théorème du point fixe, il existe un unique $w \in B_{\delta_0}$ solution de

$$\Box_A w = -(v+w)^5 \quad w(0,.) = \partial_t w(0,.) = 0,$$

et en prenant $u = v + w$, nous obtenons une solution de (30). ■

Conclusion

Nous avons pu résoudre le problème de Cauchy (30) sur un intervalle $[0,T_0]$ où T_0 est donné par (**c**) , δ_0 étant une constante universelle.

4.3 Unicité

Proposition 4.2 *Soit $T > 0$ donné. Alors le problème (30) admet au plus une solution dans $\mathcal{E}([0,T])$.*

Démonstration de la proposition 4.2. Par un argument standard utilisant l'invariance de l'équation (1) par des translations en temps, il suffit de prouver l'unicité pour T assez petit.
Soient u et v deux solutions du problème (30) dans $\mathcal{E}([0,T])$, alors $u - v$ vérifie, en vertu de (6), $\|u-v\|_{L^5([0,T],L^{10})} \leq c\|u^5 - v^5\|_{L^1([0,T],L^2)}$.
Soit en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\|u-v\|_{L^5([0,T],L^{10})} \leq c\|u-v\|_{L^5([0,T],L^{10})}\Sigma_{j=0}^4 \|u\|^{4-j}_{L^5([0,T],L^{10})}\|v\|^{j}_{L^5([0,T],L^{10})}.$$

Si T est assez petit tel que $c\Sigma_{j=0}^4 \|u\|^{4-j}_{L^5([0,T],L^{10})}\|v\|^{j}_{L^5([0,T],L^{10})} < 1$ nous obtenons $u = v$ sur $[0,T] \times I\!R^3$. ∎

4.4 Prolongement de la solution locale

Nous allons prouver l'existence globale en temps, d'abord sous l'hypothèse fondamentale suivante, que nous démontrerons à la fin de ce paragraphe
($\mathbf{H_0}$) La solution u est estimée à priori, tant qu'elle existe, dans $L^{p_c}_{loc}(I\!R, L^{2p_c})$ en fonction de son énergie initiale i.e: Pour toute donnée de Cauchy (φ,ψ) dans $\mathcal{E}$, $E_0 = \|(\varphi,\psi)\|_{\mathcal{E}}$, et pour tout intervalle temps borné I, il existe une constante positive $C(I, E_0)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p_c}(I,L^{2p_c})} \leq C(I,E_0).$$

Nous nous restreindrons aux temps positifs. D'aprés ce qui précède, le problème (30) admet une unique solution maximale u définie sur $[0,T^*[\times I\!R^3$.
On se propose de montrer l'existence de v_s solution de

$$\Box_A v_s = 0; \quad v_s(s) = u(s), \quad \partial_t v_s(s) = \partial_t u(s).$$

et qui verifie pour un certain $\delta > 0$,

$$\|v_s\|_{L^5([s,T^*+\delta[,L^{10})} \leq \delta_0,$$

ce qui permettra de prolonger la solution u sur $[s, T^* + \delta[$, et d'aboutir à une contradiction.
Pour $s \leq t < T^*$, nous pouvons écrire $u = v_s + w_s$ où

$$\Box_A w_s = -u^5, \quad w_s(s) = \partial_t w_s(s) = 0.$$

Nous avons donc

$$\|v_s\|_{L^5([s,t],L^{10})} \leq \|u\|_{L^5([s,t],L^{10})} + c\|u\|^5_{L^5([s,t],L^{10})}.$$

Or d'aprés l'hypothèse (H_0) ; $lim_{s\to T^*}\|u\|_{L^5([s,T^*[,L^{10})} = 0$. Donc pour s assez proche de T^*, nous obtenons $\|v_s\|_{L^5([s,T^*[,L^{10})} \leq \frac{\delta_0}{2}$.
La continuité de l'application $t \longmapsto \|v_s\|_{L^5([s,t],L^{10})}$ en T^* montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|v_s\|_{L^5([s,T^*+\delta[,L^{10})} \leq \delta_0.$$

Ainsi, nous pouvons prolonger u au delà de T^*, ce qui contredit la maximalité de u.
Il reste à prouver (H_0) .

Proposition 4.3 *La solution de (30) avec des données de Cauchy dans l'espace d'énergie $\mathcal{E}$ est estimée à priori, en norme $L^{p_c}([0,T^*[,L^{2p_c})$, en fonction de son énergie initiale.*

Démonstration de la proposition 4.3. Notons d'abord que par définition de T^*; $u \in L^q_{loc}([0,T^*[,L^r)$ pour tout couple de Strichartz (q,r). D'autre part, un argument de régularisation identique à celui de [14], permet d'établir l'analogue du lemme 3.2 pour la solution u.
Ensuite, nous pouvons voir qu'on peut répéter les preuves des corollaires 3.4, 3.5, 3.6, et par suite avoir le résultat. ∎

Appendice

- Estimations de Strichartz localisées

Proposition 4.4 *Soient* $z_0 = (t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times I\!\!R^d$; $d \geq 3$, $f \in L^1(I\!\!R, L^2(I\!\!R^d))$ *et* v *la solution de*

$$\left\{ \begin{array}{c} \Box_A v = f \\ v(0,.) = \varphi \in \dot{H}^1 \\ \partial_t v(0,.) = \psi \in L^2. \end{array} \right.$$

Alors il existe un réel s_0 *tel que pour tous réels* S, T *vérifiant* $s_0 \leq S \leq T < t_0$, *nous avons*

$$\begin{array}{rcl} \|v\|_{L^q(L^r(K_S^T(z_0)))} & \leq & c_q[\|\nabla\varphi\|_{L^2(D(S,z_0))} + \|\psi\|_{L^2(D(S,z_0))} \\ & + & \|\varphi\|_{L^6(D(S,z_0))} + \|f\|_{L^1(L^2(K_S^T(z_0)))}]. \end{array}$$

Démonstration de la proposition 4.4. Nous prenons $x_0 = 0$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ et U_0 un voisinage de 0 dans $I\!\!R^d$ tels que

$$\exp_0 : \{| \, v \, |_0 < \varepsilon_0\} \longrightarrow U_0,$$

soit un C^∞ difféomorphisme. Soit $s_0 < t_0$ tel que $4(t_0 - s_0) < \varepsilon_0$ et notons par

$$\tilde{U_0} = \{x \in U_0 / \mid exp_0^{-1}(x) \mid \leq t_0 - s_0\}.$$

Soit $s_0 \leq S \leq T < t_0$ et w la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} \Box_A w = f 1_{K_S^T(z_0)} \\ w(0,.) = P(\varphi 1_{D(S,z_0)}) \\ \partial_t w(0,.) = \psi 1_{D(S,z_0)}, \end{array} \right.$$

où P est l'opérateur de prolongement de $\dot{H}^1(D(S,z_0))$ dans $\dot{H}^1(I\!\!R^d)$ défini par

$$(Pg)(x) = \left\{ \begin{array}{cl} g(x) & \text{si } x \in \tilde{U_0} \\ \chi(\frac{t_0 - s_0}{|\exp_0^{-1}(x)|_0}) g(\frac{(t_0-s_0)^2}{|\exp_0^{-1}(x)|_0^2} \exp_0^{-1}(x)) & \text{si } x \in U_0 - \tilde{U_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

χ étant une fonction C^∞ vérifiant $\chi(p) = 0$ pour $p \leq \frac{1}{4}$ et $\chi(p) = 1$ pour $p \geq \frac{1}{2}$. Alors nous avons

$$\begin{array}{rcl} \|v\|_{L^q(L^r(K_S^T(z_0)))} = \|w\|_{L^q(L^r(K_S^T(z_0)))} & \leq & C_q[\|\nabla(P(\varphi 1_{D(S,z_0)}))\|_{L^2(I\!\!R^3)} \\ & + & \|\psi\|_{L^2(D(S,z_0))} + \|f\|_{L^1(L^2(K_S^T(z_0)))}], \end{array}$$

et nous concluons en remarquant que

$$\|\nabla(P(\varphi 1_{D(S,z_0)}))\|_{L^2(I\!R^3)} \leq C[\|\nabla(\varphi)\|_{L^2(D(S,z_0))} + \|\varphi\|_{L^6(D(S,z_0))}].$$

■

- Unicité de Cauchy precisée

Soit $\Box_A$ l'opérateur $\partial_t^2 - \mathrm{div}(A(x).\nabla_x.)$ défini sur $I\!R_t \times I\!R^d$ où la fonction matricielle A vérifie l'hypothèse **(H)**. Nous posons

$$\rho = \sup_{x \in I\!R^d,\, \xi \in S^{d-1}} \sqrt{A(x)\xi.\xi}, \quad \rho' = \rho.c_0. \tag{31}$$

Pour tout point (t_0, x_0) de $[0,T] \times I\!R^d$ nous définissons le cône rétrograde issu de (t_0, x_0) par l'ensemble $C = \{(t,x)/t \in]0, t_0[, x \in U_{x_0} \text{ et } \varphi_{x_0} < \rho(t_0 - t)\}$ et $S_0 = \{(0,x)/\varphi_{x_0} < \rho t_0\}$ sa trace à $t = 0$. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 4.5 *Soit* $u \in \mathcal{C}^2([0,T], \mathcal{D}'(I\!R^d))$ *une solution de*

$$\Box_A u = 0 \ \textit{dans } C.$$

Si $u(0,.) = \partial_t u(0,.) = 0$ *dans* S_0*, alors* $u \equiv 0$ *dans* C*.*

Démonstration de la proposition 4.5. La preuve de ce résultat est analogue à celle de Chazarin et Piriou[3] (voir théorème 4.13). Nous pouvons supposer que $u \in \mathcal{C}^2([0,T] \times I\!R^d)$. Pour tout réel $\varepsilon \in]0, t_0[$ posons $t_\varepsilon = t_0 - \varepsilon$ et appellons C_ε le cône retrograde issu de (t_ε, x_0). Pour $\lambda \in [0,1[$ nous posons

$$\Phi_\lambda(x) = \lambda t_\varepsilon - [\frac{\lambda^3}{\rho'^2}\varphi_{x_0}^2(x) + \lambda^2(1-\lambda)t_\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$S_\lambda = \{(t,x)/\varphi_{x_0} < \rho' t_\varepsilon,\ t = \Gamma_\lambda(x)\}$$

et

$$\wedge = \{\lambda \in [0,1[/D^\alpha u_| S_\lambda = 0,\ \mid \alpha \mid \leq 1\}.$$

Pour les valeurs de ρ et ρ' ainsi choisies, il est clair, par construction de Φ_λ, que S_λ est de type espace pour l'opérateur $\Box_A$. D'autre part $\wedge$ est un fermé de $[0,1[$ contenant 0. Par ailleurs, la proposition 4.11 de [3] montre que c'est un ouvert ce qui implique que $\wedge = [0,1[$ et par suite $u \equiv 0$ dans C_ε. Puisque C est la réunion des C_ε, alors u est nulle dans C. ■

- Une remaque sur la métrique A

Dans cet appendice nous allons revenir sur la remarque **1.1** en justifiant les modifications faites sur la métrique. La lecture de la preuve du lemme 3.2 (lemme fondamental) montre que la régularité $\mathcal{C}^2$ bornée de la métrique suffit.
Il reste alors à vérifier l'estimation

$$\int_{|x|>R+t} e(t)dx \leq \int_{|x|>R} e(0)dx \quad t \geq 0$$

où $e(t) = \frac{1}{2}(u_t^2 + \mid A^{\frac{1}{2}} \nabla_x u \mid^2) + \frac{1}{p_c+1} u^{p_c+1}$ est la densité de l'énergie.
Pour cela nous considérons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ telle que

$$\chi(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \leq R, \quad \chi(s) = 1 \quad \text{si} \quad s \geq 2R \quad \text{et} \quad \chi' \geq 0,$$

et nous posons

$$f(t) = \int_{I\!R^3} e(t)\chi(\mid x \mid - \rho t)dx$$

où la constante ρ est donnée par (31).
En utilisant le fait que $\chi' \geq 0$ et

$$\mid A^{\frac{1}{2}} \nabla u . A^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\mid x \mid} \partial_t u \mid \leq \frac{c}{2}(A\nabla u . \nabla u + (\partial_t u)^2),$$

nous obtenons $f'(t) \leq 0$. Ce qui permet de conclure.

References

[1] **H. Bahouri and P. Gérard** : *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations.*, American Journal of Mathematics, **121**, pp. 131-175, 1999.

[2] **S. Bardos and M. Belyshev**: *The wave shaping problem*, Partial differential equations and functional analysis, pp. 41-59, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. , 22 Birkhauser Boston, MA 1996.

[3] **J. Chazarin et A. Pirou**: *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthiers Villars, Paris, 1981.

[4] **S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine**:*Riemannian geometry*, Second edition Springer verlag,1993.

[5] **J. Ginibre and G. Velo**: *The global Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equation*, Math.Z , **189**, pp. 487-505, 1985.

[6] **J. Ginibre and G. Velo**: *Generalized Strichartz inequalities for the wave equations*, J. Functional Analysis , **133**, pp. 50-68, 1995.

[7] **M. Grillakis**: *Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity*, Annal. of math. , **132**, pp. 485-509, 1990.

[8] **M. Grillakis**: *Regularity for the wave equation with a critical nonlinearity*, Comm. Pure Appl. Math , **XLVI**, pp. 749-774, 1992.

[9] **S. Ibrahim et M. Majdoub**: *Existence globale de solutions pour l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables*, Comptes- Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, **328**, pp. 579-584, 1999.

[10] **L. V. Kapitanski**: *The Cauchy problem for a semilinear wave equation*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Math. Inst. Steklov(LOMI), **181-182**, pp. 24-64 and 38-85, 1990.

[11] **L. V. Kapitanski**: *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality*, Leningrad Math. Journ., **1**, # 10, pp. 693-726, 1990.

[12] **L. V. Kapitanski**: *The Cauchy problem for a semilinear wave equation II*, J. of Soviet Math., **62**, Série I, pp. 2746-2777, 1992.

[13] **A. Majda**: *Compressible fluid flow and systems of conservation lows in several space variables*, Springer Appl. Math. sc., **53**, 1984.

[14] **J. Shatah and M. Struwe**: *Regularity results for nonlinear wave equations*, Ann.of Math., **2**, $n°$ 138 pp. 503-518, 1993.

[15] **J. Shatah and M. Struwe**: *Well-Posedness in the energy space for semilinear wave equation with critical growth*, IMRN, **7**, pp. 303-309, 1994.

[16] **M Struwe**: *Semilinear wave equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **N.S**, $n°$ 26, pp. 53-85, 1992.

[17] **C. Zuily**: *Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaire*, Séminaire Bourbaki, **779**, 1993-1994.