C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 579-584, 1999
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Existence globale de solutions pour l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables

Slim IBRAHIM [a], **Mohamed MAJDOUB** [b]

[a] Département de mathématiques, faculté des sciences de Bizerte, Zarzouna 7021, Bizerte, Tunisie
[b] Institut préparatoire aux études scientifiques et techniques, B.P. 51, La Marsa 2070, Tunisie

(Reçu le 7 janvier 1999, accepté le 11 janvier 1999)

Résumé. Dans cette Note, on s'intéresse à l'existence globale de solutions classiques de l'équation des ondes critique à coefficients variables en dimension trois d'espace :

(E) $$\square_A u + |u|^4 u = \partial_t^2 u - \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla_x u) + |u|^4 u = 0, \qquad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x,$$

où A est une fonction régulière à valeurs dans les matrices 3×3 définies positives, valant l'identité en dehors d'un compact. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

The global Cauchy problem for the critical non-linear wave equation in variable coefficients

Abstract. *In this Note, we study the existence of global smooth solutions of the critical wave equation in variable coefficients in three dimensions of space:*

(E) $$\square_A u + |u|^4 u = \partial_t^2 u - \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla_x u) + |u|^4 u = 0, \qquad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x,$$

where A is a regular function valued in the space of 3×3 positive definite matrix, which is the identity outside a compact set of $\mathbb{R}^3$. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

Let A be a regular function valued in the space of 3×3 positive definite matrix, which is the identity outside a compact set. Moreover, we assume that there exists some strictly positive $c_0 \leq 1$ such that for all ξ in $\mathbb{R}^3$,

(H) $$c_0|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq c_0^{-1}|\xi|^2.$$

We are interested in long time in the existence of solutions of the following Cauchy problem:

(P) $$\begin{cases} \square_A u + |u|^4 u = 0, \\ u(0, \cdot) = \varphi, \\ \partial_t u(0, \cdot) = \psi. \end{cases}$$

Our main result is the following:

Note présentée par Jean-Michel Bony.

THEOREM 1. – *Let s be an integer, $s > \frac{3}{2}+2$ and let $(\varphi, \psi) \in \mathrm{H}^s \times \mathrm{H}^{s-1}$. Under the hypothesis* (H) *on the function A, the Cauchy problem* (P) *has a unique global solution u such that $u \in \mathrm{C}^2([0,+\infty[\times \mathbb{R}^3)$.*
Moreover, one has for all $0 \le j \le 1$, $\partial_t^j u \in \mathrm{C}^j(\mathbb{R}, \mathrm{H}^{s-j})$.

We indicate that in the constant case (i.e. $A(x) \equiv \mathrm{Id}$), this problem was firstly solved by Struwe [9] in the radial case, then by Grillakis [3] in the general case, and Shatah–Struwe [7], [8] in other dimensions.

In this Note, we try to adapt (despite its rigidity) the method of Shatah–Struwe.

Sketch of the proof. – Under the Hypothesis (H) on $A(x)$, we can regard $(\mathbb{R}^3, A^{-1}(x))$ as a Riemannian manifold. First, we proceed with a careful study of some local properties of the geodesic metric, to define what we call "a geodesic cone". Next, we prove that concentration phenomena of energy can not hold, and that, by estimating the L^6-norm of the solution u on little sections of the geodesic cones. We conclude the proof of Theorem 1, by using Strichartz-inequalities to obtain a priori L^∞ estimate of the solution u.

---

1. Introduction

On établit dans cette Note un résultat d'existence globale de solutions classiques pour le problème de Cauchy associé à l'équation (E). Plus précisément, on montre qu'on a :

THÉORÈME 1. – *Soit A une fonction régulière à valeurs dans les matrices 3×3 définies positives, valant l'identité en dehors d'un compact. On suppose qu'il existe une constante positive $c_0 \le 1$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$*

$$c_0|\xi|^2 \le A(x)\xi \cdot \xi \le c_0^{-1}|\xi|^2. \tag{H}$$

Alors, pour toute donnée $(\varphi, \psi) \in \mathrm{H}^s \times \mathrm{H}^{s-1}$, où s est un entier $s > \frac{3}{2} + 2$, l'équation (E) *admet une unique solution $u \in \mathrm{C}^2([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$ vérifiant $(u(0,\cdot), \partial_t u(0,\cdot)) = (\varphi, \psi)$.*
De plus, $\partial_t^j u \in \mathrm{C}^j(\mathbb{R}, \mathrm{H}^{s-j})$, $0 \le j \le 1$.

Rappelons que dans le cas constant (i.e. $A(x) \equiv \mathrm{Id}$), ce problème a d'abord été résolu dans le cas radial par Struwe [9], puis dans le cas général par Grillakis [3], et par Shatah–Struwe [7], [8] pour les autres dimensions (pour une bibliographie détaillée, *voir* [10]). Notre résultat, comme celui de Shatah–Struwe, s'appuie essentiellement sur deux estimations fondamentales. La première est une estimation pour l'équation linéaire due à Kapitansky (*voir* [5], théorème 1.3) et dite inégalité de Strichartz ; la seconde estimation exprime la non-concentration du terme non linéaire de l'énergie (et par suite de l'énergie). Le point-clef de cette estimation consiste à adopter un point de vue géométrique ; on exhibe des hypersurfaces de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3$ dépendant de la géométrie de l'opérateur $\Box_A$ et qui jouent, dans le cas constant, le même rôle que les cônes d'ondes usuels. Plus précisément, on a :

LEMME 1. – *Pour tout $z_0 = (t_0, x_0) \in [0, \infty[\times\mathbb{R}^3$ et toute solution classique u de* (E) *dans un voisinage de z_0 on a*

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\mathrm{d_g}(x_0,x) \le t_0 - t} |u(t,x)|^6 \mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

où $\mathrm{d_g}$ désigne la distance géodésique associée à la métrique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $A^{-1}(x)$.

2. Cônes géodésiques

Pour tout $(u, v) \in (\mathrm{T}_x\mathbb{R}^3)^2$, on notera par $\langle u, v\rangle_x = A^{-1}(x)u \cdot v$ et $\|\cdot\|_x$ la norme correspondante. On sait que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, il existe V_0 voisinage de 0 dans $\mathrm{T}_{x_0}\mathbb{R}^3$, U_{x_0} un voisinage de x_0

dans $\mathbb{R}^3$, et un C^∞ difféomorphisme noté $\exp_{x_0}$, qui envoie V_0 dans U_{x_0} et tel que la distance géodésique $\mathrm{d_g}$ est donnée par :

$$\mathrm{d_g}(x_0, x) = \|\exp_{x_0}^{-1}(x)\|_{x_0}, \quad \forall x \in U_{x_0}. \tag{1}$$

Cette application vérifie les propriétés décrites dans le lemme de Gauss (*voir* [2], Prop. (2.93)).

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, on pose $\varphi_{x_0}(x) = \mathrm{d_g}(x_0, x)$. En réduisant le voisinage U_{x_0} et en utilisant le lemme de Gauss, on déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 1. – *La fonction φ_{x_0} est de classe C^∞ sur $U_{x_0}\backslash(x_0)$ et*

$$A(x)\nabla\varphi_{x_0} \cdot \nabla\varphi_{x_0} = 1, \qquad U_{x_0}\backslash(x_0), \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,(\varphi_{x_0}A(x)\nabla\varphi_{x_0}) = 3 + \mathrm{O}(\varphi_{x_0}), \tag{3}$$

$$B(x) := A(x)\nabla(\varphi_{x_0}^t\nabla\varphi_{x_0}) - \mathrm{Id} = \mathrm{O}(\varphi_{x_0}), \tag{4}$$

$$c(x_0)|x - x_0| \leq \varphi_{x_0}(x) \leq c^{-1}(x_0)|x - x_0|, \tag{5}$$

où $c(x_0)$ est une constante positive.

Démonstration. – On prend $x_0 = 0$ et on notera par $\varphi = \varphi_0$, $\widetilde{\nabla}$ le gradient associé à la métrique g. Si $v \in V_0$, on pose $x = \exp_0(v)$. L'assertion (5) découle du fait que $\exp_{x_0}$ est un difféomorphisme. Dans ce qui suit, on se limitera à la preuve de (2) et (3). La preuve de (4) est similaire. Pour tout réel $t > 0$, assez proche de 1, $\varphi(\exp_0(tv)) = t\|v\|$. En différentiant cette égalité par rapport à t puis par rapport à v, on obtient :

$$\mathrm{D}\varphi(\exp_0(v))\mathrm{D}\exp_0(v) \cdot v = \|v\|_0, \tag{6}$$

$$\mathrm{D}\varphi(\exp_0(v))\mathrm{D}\exp_0(v) \cdot w = 0 \quad \forall w \in v^\perp, \tag{7}$$

ou encore $\widetilde{\nabla}\varphi\,(\exp_0(v)) = \frac{\mathrm{D}\exp_0(v)\cdot v}{\|v\|_0}$ et $\|\widetilde{\nabla}\varphi\,(\exp_0(v))\|_{\exp_0(v)} = 1$, ce qui achève la preuve de (2) sachant que $\widetilde{\nabla} = A(\cdot)\nabla$. Ensuite, soit $\psi(v) = (\varphi A\nabla\varphi)\,(\exp_0(v)) = \mathrm{D}\exp_0(v) \cdot v$, on a donc $\mathrm{div}\,(\psi)(v) - 3 = \mathrm{div}\,(\psi)(v) - \mathrm{div}\,(\psi)(0) = \mathrm{O}(\|v\|_0) = \mathrm{O}(\varphi)$. D'autre part, $\mathrm{div}_z(\varphi A\nabla\varphi)(0) = 3$, et par la formule de Taylor, $\mathrm{div}_x(\varphi A\nabla\varphi)(x) - 3 = \mathrm{O}(\|x\|)$, d'où (3) en vertu de (5).

2.1. Notations

Dans toute la suite, on appellera cône géodésique l'ensemble des points (t, x) tels que $\varphi_{x_0}^2(x) \leq (t - t_0)^2$, $x \in U_{x_0}$.

Si $z_0 = (t_0, x_0) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ et $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on désignera par :

$K(z_0) := \{z = (t, x) \in [0, t_0] \times U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) \leq t_0 - t\}$ le cône rétrograde,

$\widetilde{K}(z_0) := \{z = (t, x) \in [t_0, +\infty[\times U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) \leq t - t_0\}$ le cône d'avenir,

$M(z_0) := \{z = (t, x) \in [0, t_0] \times U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) = t_0 - t\}$ le manteau,

$D(t, z_0) := \{x \in U_{x_0}$ tel que $\varphi_{x_0}(x) \leq t_0 - t\}$ la section du cône à l'instant t,

$Q_S^T := \{z = (t, x) \in Q$ tel que $S \leq t \leq T\}$,

$e(u) := \dfrac{1}{2}(u_t^2 + |A^{\frac{1}{2}}\nabla_x u|^2) + \dfrac{1}{6}u^6$ la densité d'énergie,

$$E(u,D(t,z_0)) := \int_{D(t,z_0)} e(u)\mathrm{d}x = E_0(u,D(t,z_0)) + \int_{D(t,z_0)} \frac{u^6}{6} \text{ l'énergie locale à l'instant } t,$$

$$\mathrm{d}_{z_0}(u) := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\varphi_{x_0}|^2}}\left[\frac{|u_t A^{\frac{1}{2}}\nabla\varphi_{x_0} - A^{\frac{1}{2}}\nabla u|^2}{2} + \frac{u^6}{6}\right] \text{ la densité de flux,}$$

$$\mathrm{Flux}\,(u, M_S^T(z_0)) := \int_{M_S^T(z_0)} \mathrm{d}_{z_0}(u)\mathrm{d}\sigma \text{ le flux,}$$

$$\|u\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathrm{L}^r(Q))} := \int_{\pi_t(Q)} \left(\int_{Q_t} |u(t,x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{r}}\mathrm{d}t,$$

où $Q_t = \{x, (t,x) \in Q\}$ et $\pi_t : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \to \mathbb{R}$ est la première projection.

3. Existence globale de solutions classiques

La preuve du théorème 1 découlera des points suivants :

LEMME 2 (Estimation de l'énergie). – *Soit* $u \in \mathrm{C}^2(K(z_0)\backslash z_0)$ *une solution de* (E). *Alors pour tous* $0 \le a < b < t_0$, *on a* $E(u,D(b,z_0)) + \mathrm{Flux}\,(u, M_a^b(z_0)) = E(u,D(a,z_0))$.

LEMME 3 (Le lemme fondamental). – *Soit* $u \in \mathrm{C}^2(K(z_0)\backslash z_0)$ *une solution de* (E). *Alors pour tous* $0 < a < b < t_0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_{D(a,z_0)} |u(a,x)|^6\mathrm{d}x \le C_0(A)\bigg\{ &\frac{t_0-b}{t_0-a}\big(E(u,D(a,z_0)) + E^{\frac{1}{3}}(u,D(a,z_0))\big) \\ &+ E(u,D(a,z_0)) - E(u,D(b,z_0)) + [E(u,D(a,z_0)) - E(u,D(b,z_0))]^{\frac{1}{3}} \\ &+ (b-a)\big(E(u,D(a,z_0)) + E^{\frac{1}{3}}(u,D(a,z_0))\big)\bigg\} \end{aligned} \tag{8}$$

où $C_0(A)$ *est une constante dépendant de* A.

Démonstration. – On prend $z_0 = (0,0)$. On note par φ la fonction φ_0, par $D(t)$ le disque $D(t,0)$, et par $E(t)$ l'énergie $E(u,D(t,0))$. Quitte à inverser le temps et conserver les mêmes notations, on pourra travailler dans le cône d'avenir. On multiplie l'équation (E) par $L_\varphi u = t\partial_t u + \varphi A\nabla\varphi\nabla u + u$, on obtient $0 = \partial_t q + \mathrm{div}_x P + R$, où l'on a posé

$$q(t,x) = t\left[\frac{1}{2}\left|\frac{L_\varphi u}{t}\right|^2 + \frac{A\nabla u\cdot\nabla u - \frac{\varphi^2}{t^2}(A\nabla\varphi\nabla u)^2}{2} + \frac{u^6}{6}\right] + \frac{u^2}{t},$$

$$P = \left[-\frac{(\partial_t u)^2}{2} + \frac{A\nabla u\cdot\nabla u + \frac{u^2}{t^2} - 2\partial_t u\frac{u}{t}}{2} + \frac{u^6}{6}\right]\varphi A\nabla\varphi - L_\varphi u A\nabla u,$$

$$\begin{aligned}R = {}&(3-\mathrm{div}_x(\varphi A\nabla\varphi))\left[\frac{A\nabla u\cdot\nabla u}{2} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^2}{2t^2} - \frac{(\partial_t u)^2}{2} - \partial_t u\frac{u}{t}\right] + B(A\nabla u)\cdot\nabla u \\ &+ \varphi\sum_{i,j,k,l} a_{kl}\partial_k(a_{ij})\partial_i u\left(\partial_j\varphi\partial_l u - \partial_l\varphi\frac{\partial_j u}{2}\right) + \frac{u^6}{3} = \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}.\end{aligned}$$

La fonction matricielle B du terme II est celle donnée par (4). En intégrant sur $\widetilde{K}^b_a$, et en utilisant les résultats de la proposition 1 on obtient

$$Q(b) - Q(a) - \int_{\widetilde{M}^b_c} t\left|\frac{L_\varphi u}{t}\right|^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}} + \int_{\widetilde{K}^b_c} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,$$

où l'on a posé $Q(s) = \int_{D(s)} q(s,x)\mathrm{d}x$.

Par ailleurs, on remarqua que

$$\int_{D(t)} |u(t,x)|^6 \, dx \le C\frac{1}{t}Q(t) \le Q(E(t) + E^{\frac{1}{3}}(t))$$

et que

$$\int_{\widetilde{M}_a^b} t\left|\frac{L_\varphi u}{t}\right|^2 \frac{d\sigma}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}} \le Cb[E(b) - E(a) + (E(b) - E(a))^{\frac{1}{3}}].$$

La dernière inégalité résulte du lemme 2. D'autre part, en utilisant (2), (3) et (4) de la proposition 1 on obtient

$$\int_{\widetilde{K}_a^b} |\mathrm{I}| \, dx \, dt \le Cb(b-a)(E(b) + E(b)^{\frac{1}{3}}) \quad \text{et} \quad \int_{\widetilde{K}_a^b} \{|\mathrm{II}| + |\mathrm{III}|\} \, dx \, dt \le Cb(b-a)E(b);$$

ce qui, en vertu du signe de IV, achève la preuve du lemme 3.

COROLLAIRE 1. – *Soit* $z_0 = (t_0, x_0)$ *et soit* $u \in C^2(K(z_0)\backslash z_0)$ *une solution de* (E). *Alors*

$$\lim_{b\to t_0} \int_{D(b)} |u(b,x)|^6 dx = 0. \tag{9}$$

COROLLAIRE 2

$$\forall (q,r) \textit{ tel que } \frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}, \quad q > 2, \quad u \in L^q(L^r(K(z_0))), \tag{10}$$

$$\lim_{s\to t_0} E(u, D(s,z_0)) = 0, \tag{11}$$

$$u \in L^\infty([0,t_0[, L^6(\mathbb{R}^3)), \tag{12}$$

$$\langle D\rangle u \in L^\infty([0,t_0[, L^6(\mathbb{R}^3)). \tag{13}$$

Démonstration. – Les assertions (11) et (12) se démontrent d'une manière identique que dans [7]. Pour obtenir (10), notons d'abord qu'on peut localiser les inégalités de Strichartz dans les cônes tronqués $K_s^t(z_0)$ de la même façon que dans le cas constant, et obtenir

$$\|v\|_{L^q(L^r(K_s^{t_0}(z_0)))} \le c_q\big[\|\partial_t v(s)\|_{L^2(D(s,z_0))} + \|\nabla v(s)\|_{L^2(D(s,z_0))} + \|\Box_A v\|_{L^1(L^2(K_s^{t_0}(z_0)))}\big]. \tag{14}$$

Pour le choix $(q,r) = (4,\ 12)$ dans (14) et pour s assez proche de t_0, on obtient l'inégalité $\|u\|_{L^4(L^{12}(K_s^{t_0}(z_0)))} \le c(z_0, E(u, D(s,z_0)))$, et par suite le résultat par interpolation des cas $(4,\ 12)$ et $(\infty, 6)$. Pour estimer $\langle D\rangle u$, notons que $u \in L^4([0,t_0[, L^{12}(\mathbb{R}^3))$ et que $\Box_A\langle D\rangle u + R_1\langle D\rangle u + \langle D\rangle u = 0$, où R_1 est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. En appliquant les inégalités de Strichartz avec $(q,r) = (\infty, 6)$ et en utilisant Plancherel la preuve s'achève.

Fin de la démonstration du théorème 1. – Le théorème suivant, concernant l'existence locale et l'explosion des solutions régulières de (P), est un résultat classique. En se référant, par exemple, à [6] on a :

THÉORÈME 2. – *Le problème de Cauchy associé à l'équation* (E) *admet une unique solution classique maximale* $u \in C^2([0,T^*[\times\mathbb{R}^3)$ *vérifiant l'une des deux alternatives suivantes :*

$$\begin{cases} \text{(i)} & T^* = +\infty, \\ \text{(ii)} & T^* < +\infty \textit{ et } \overline{\lim}_{t\to T^*} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = +\infty. \end{cases}$$

Du corollaire 2, on déduit que $u \in L^\infty([0,T^*[, W^{1,6}(\mathbb{R}^3))$, et comme $W^{1,6}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors on a $T^* = +\infty$.

Remarque 1. – On rappelle qu'en dimension $d \geq 3$, le terme non linéaire de l'équation est $|u|^{\frac{4}{d-2}}u$. Le résultat d'existence globale reste vrai pour les dimensions $3 \leq d \leq 6$.

Remarque 2. – En utilisant des arguments de régularisation analogues à ceux de [1] et [8], on peut vérifier que pour une régularité plus faible des données (i.e. $(\varphi,\psi) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$), le lemme fondamental reste vrai lorsque la solution u est dans $C([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$. Ceci nous permet de prouver l'existence globale de solutions au sens de Shatah–Struwe de (E). Les détails seront développés dans [4].

Références bibliographiques

[1] Bahouri H., Gérard P., High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, Prébublication d'Orsay, Paris, 1997; Amer. J. Math. (à paraître).

[2] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., Riemannian geometry, Second edition, Springer-Verlag, 1993.

[3] Grillakis M., Regularity for the wave equation with a critical non linearity, Commun. Pure Appl. Math. XLVI (1992) 749–774.

[4] Ibrahim S., Majdoub M., Existence globale, en grand temps, de solutions de l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables, (en préparation).

[5] Kapitanski L.V., The Cauchy problem for a semilinear wave equation II, J. of Soviet Math. 62 (1992) 2746–2777.

[6] Majda A., Compressible fluid flow and systems of conservation lows in several space variables, Appl. Math. 53 (1984).

[7] Shatah J., Struwe M., Regularity results for nonlinear wave equations, Ann. Math. 138 (1993) 503–518.

[8] Shatah J., Struwe M., Well-Posedness in the energy space for semilinar wave equation with critical growth, IMRN 7 (1994) 303–309.

[9] Struwe M., Globally regular solutions to the u^5 Klein Gordon equations, Ann. Scu. Norm. Pisa 15 (1988) 495–513.

[10] Zuily C., Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaire, Séminaire Bourbaki 779, 1993–1994.