C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 791–794, 2000
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Solutions axisymétriques des équations de Navier–Stokes

Isabelle GALLAGHER [a], Slim IBRAHIM [b], Mohamed MAJDOUB [b]

[a] Département de mathématiques, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France
Courriel : Isabelle.Gallagher@math.u-psud.fr

[b] Département de mathématiques, faculté des sciences de Bizerte, Zarzouna 7021, Bizerte, Tunisie

(Reçu le 15 octobre 1999, accepté après révision le 16 mars 2000)

Résumé. Nous étudions les équations de Navier–Stokes posées dans un domaine invariant par rotation autour de l'axe vertical en trois dimensions d'espace, ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$ entier ; nous cherchons des solutions invariantes par cette rotation, sous des conditions sur la donnée initiale proches des hypothèses naturelles en deux dimensions d'espace. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Axisymmetric solutions of the Navier–Stokes equations

Abstract. *We study the tridimensional Navier–Stokes equations, written in a domain which is invariant under rotation around the vertical axis, or in the whole space* $\mathbb{R}^3$*; the solutions seeked are also invariant by that rotation, and we look for conditions on the initial data which are close to the natural assumptions in the case of two space dimensions.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

L'objectif de cette Note est de présenter des résultats d'existence et d'unicité pour les équations de Navier–Stokes incompressibles axisymétriques suivantes :

$$(\mathrm{NS_{ax}})\qquad \begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v = -\nabla p \text{ dans } \mathbb{R}^+\times\Omega, \quad v=0 \text{ sur } \mathbb{R}^+\times\partial\Omega,\\ \operatorname{div} v = 0 \text{ et } v \text{ axisymétrique},\\ v_{|t=0} = v_0 \quad \text{avec } \operatorname{div} v_0 = 0 \text{ et } v_0 \text{ axisymétrique.} \end{cases}$$

La constante $\nu>0$ représente la viscosité du fluide, et le domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ est supposé axisymétrique, c'est-à-dire invariant par rotation autour de l'axe vertical $\mathbb{R}(0,0,1)$. Les inconnues du système ($\mathrm{NS_{ax}}$) sont la vitesse $v(t,x,y,z)$ et la pression $p(t,x,y,z)$; il est bien connu que la pression peut être éliminée en projetant ($\mathrm{NS_{ax}}$) sur les champs de divergence nulle (traduisant l'incompressibilité du fluide), au moyen du projecteur de Leray P, orthogonal dans L^2. Nous dirons que v est un champ de vecteurs axisymétrique si, avec un abus de notation ne conduisant à aucune ambiguïté, $v(t,x,y,z)=v(t,r,z)$,

Note présentée par Yves MEYER.

S0764-4442(00)00262-7/FLA

avec $r \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$. Dans [12], M.R. Ukhovskii et V. Yudovitch démontrent l'existence et l'unicité de solutions pour le système ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$), pour tout temps, pour une donnée initiale vérifiant $v_0 \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^3)$, ainsi que $\operatorname{rot} v_0 \in \mathrm{L}^2 \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $(\operatorname{rot} v_0)/r \in \mathrm{L}^2 \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$; ils supposent aussi que la composante angulaire de la vitesse v^θ est nulle, hypothèse que nous ne faisons pas ici. Notre but dans cette Note est d'abaisser les fortes hypothèses de régularité de [12] sur la donnée initiale.

Rappelons quelques résultats sur les équations de Navier–Stokes (NS) (nous appellerons (NS) les équations de Navier–Stokes habituelles, sans hypothèse d'axisymétrie sur la solution v) : en dimension deux, il suffit de supposer que $v_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ pour avoir existence et unicité de solutions. En dimension trois en revanche, l'hypothèse $v_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ donne l'existence, mais sans unicité, de solutions « à la Leray », c'est-à-dire $v \in \mathrm{L}^\infty\big(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^2(\Omega)\big)$ et $\nabla v \in \mathrm{L}^2\big(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^2(\Omega)\big)$, vérifiant l'inégalité d'énergie (*voir* [9]) :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \big\|v(t)\big\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t \big\|\nabla v(s)\big\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leqslant \|v_0\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}. \tag{1}$$

L'existence de telles solutions dans le cas axisymétrique ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$) s'obtient par des méthodes analogues : une méthode de Galerkin par exemple (*voir* [10,3]), en choisissant des fonctions de base axisymétriques, permet d'obtenir des solutions axisymétriques (*voir* [6] pour plus de détails). Notre objectif ici va être d'obtenir des conditions d'unicité de ces solutions. Dans [5], il est montré que pour une donnée initiale ne dépendant que de deux variables, il suffit qu'elle soit dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ pour avoir unicité des solutions des équations (NS) tridimensionnelles, périodiques dans la troisième direction. Un domaine axisymétrique étant comparable à un domaine bidimensionnel, sauf près de l'axe de rotation, on va donc chercher ici des conditions proches des conditions bidimensionnelles en s'attendant à une discussion selon la position du domaine par rapport à l'axe de rotation.

Dans la suite, nous noterons $\mathrm{H}(\Omega)$ la fermeture dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ de l'ensemble des champs de vecteurs dans $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, de divergence nulle.

2. Résultats

Le premier résultat de ce travail concerne le cas où le domaine Ω ne rencontre pas l'axe de rotation. On obtient alors le même résultat qu'en deux dimensions d'espace.

THÉORÈME 1. – *Supposons que le domaine axisymétrique* Ω *vérifie* $r_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\limits_{(x,y,z)\in\Omega} \sqrt{x^2+y^2} > 0.$

Alors si $v_0 \in \mathrm{H}(\Omega)$*, il existe une unique solution au système* ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$)*, vérifiant* (1).

Dans le cas où le domaine rencontre l'axe de rotation en un point, la régularité à imposer à la donnée initiale tend vers la régularité bidimensionnelle quand le domaine devient plus plat près de l'axe. Ce théorème peut être mis en rapport avec les résultats de N. Achtaich [1], montrant que les inclusions de Sobolev tridimensionnelles sont d'autant plus proches des inclusions bidimensionnelles que le domaine est plus plat.

THÉORÈME 2. – *Supposons que le domaine axisymétrique* Ω *vérifie*

$$\Omega \subset \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\big|\; r<R_0 \Longrightarrow -Cr^\alpha \leqslant z \leqslant Cr^\alpha\big\},$$

où $R_0>0$*,* $\alpha>4$ *et* $C>0$ *sont des réels fixés. Soit* $v_0 \in \mathrm{H}(\Omega)$ *; alors si* v_1 *et* v_2 *sont deux solutions de* ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$) *vérifiant* (1)*, telles que* $v_1 \in \mathrm{L}^\infty\big(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^{2+\varepsilon}(\Omega)\big)$ *avec* $\varepsilon(\alpha-4)>1/12$*, alors* $v_1=v_2$.

Dans la dernière partie de cette étude, on s'intéresse au cas où $\Omega=\mathbb{R}^3$. Rappelons que le premier résultat d'unicité de solutions des équations de Navier–Stokes (NS) dans $\mathbb{R}^3$ est dû à H. Fujita et T. Kato (*voir* [4]), qui obtiennent des solutions dans l'espace des champs de vecteurs v tels que $v \in \mathrm{C}^0\big([0,T], \dot{\mathrm{H}}^{1/2}(\mathbb{R}^3)\big)$ et $t^{1/4}\nabla v \in \mathrm{C}^0\big([0,T], \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)\big)$, où $\dot{\mathrm{H}}^s$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre s. L'espace $\dot{\mathrm{H}}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ est bien adapté à (NS) car il est invariant par le changement d'échelle de l'équation (*voir* [2] par exemple). La méthode de Kato va nous permettre ici de démontrer un théorème analogue dans le cas axisymétrique, où l'espace $\dot{\mathrm{H}}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ est remplacé par un espace équivalent à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ à distance finie strictement positive de l'axe, mais dont l'échelle est celle de $\dot{\mathrm{H}}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, et donc celle de l'équation ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$).

THÉORÈME 3. – *Soit* $v_0 \in \mathrm{L}^2_0$, *avec* $\mathrm{L}^2_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \bigl\{ f$ *axisymétrique* $\bigm| \int |f(r,z)|^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z < \infty \bigr\}$. *Alors il existe un unique temps* $T^* > 0$ *maximal et une unique solution* v *à* ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$), *telle que pour tout* $T < T^*$, $v \in \mathrm{L}^\infty([0,T], \mathrm{L}^2_0)$, $t^{1/2}\nabla v \in \mathrm{L}^\infty([0,T], \mathrm{L}^2_0)$ *et* $\lim_{t\to 0} t^{1/2}\nabla v = 0$ *dans* L^2_0. *De plus, il existe une constante* $c > 0$ *telle que si* $\|v_0\|_{\mathrm{L}^2_0} \leqslant c\nu$, *alors* $T^* = \infty$.

3. Éléments de démonstrations

Nous renvoyons à [6] pour les démonstrations précises, et donnons ici les principales étapes.

Démonstrations des théorèmes 1 *et* 2. – Dans ces deux théorèmes, la faible régularité des fonctions ne permet pas de faire directement des estimations d'énergie sur l'équation vérifiée par la différence de deux solutions de ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$). On va donc utiliser une méthode de type « fort-faible », en suivant la méthode introduite par W. von Wahl (*voir* [13]) : on considère deux solutions axisymétriques « à la Leray » du système ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$), notées v_1 et v_2, et l'on forme simplement la différence $w \stackrel{\text{déf}}{=} v_2 - v_1$; cette fonction vérifie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\bigl\|w(t)\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2} + \nu\int_0^t \bigl\|\nabla w(s)\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\bigl\|v_1(t)\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2} + \nu\int_0^t \bigl\|\nabla v_1(s)\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\bigl\|v_2(t)\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &+ \nu\int_0^t \bigl\|\nabla v_2(s)\bigr\|^2_{\mathrm{L}^2}\,\mathrm{d}s - \bigl(v_2(t) \mid v_1(t)\bigr)_{\mathrm{L}^2} - 2\nu\int_0^t \bigl(\nabla v_2(s) \mid \nabla v_1(s)\bigr)_{\mathrm{L}^2}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Les quatre premiers termes du second membre s'estiment simplement par l'inégalité d'énergie (1). Quant aux derniers, on peut montrer le résultat suivant.

LEMME 1. – *Sous les hypothèses des théorèmes* 1 *et* 2, *on a*

$$\begin{aligned}&\bigl(v_2(t) \mid v_1(t)\bigr)_{\mathrm{L}^2} + 2\nu\int_0^t \bigl(\nabla v_2(s) \mid \nabla v_1(s)\bigr)_{\mathrm{L}^2}\,\mathrm{d}s \\ &\quad = \bigl(v_{2|t=0} \mid v_{1|t=0}\bigr)_{\mathrm{L}^2} - \int_0^t \bigl(w(s)\cdot\nabla w(s)) \mid v_1(s)\bigr)_{\mathrm{L}^2}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Formellement ce résultat est évident, toute la difficulté réside dans sa justification, en considérant des approximations de v_1 et v_2 : dans le cas du théorème 1, on fait appel au lemme suivant.

LEMME 2. – *Sous les hypothèses du théorème* 1, *on a, pour tout champ de vecteurs* v *axisymétrique,*

$$\|v\|_{\mathrm{L}^4(\Omega)} \leqslant C r_0^{-1/4} \|v\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \,\|\nabla v\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

La conclusion du théorème 1 suit de manière très simple. Pour le cas du théorème 2, le lemme 2 ne convient plus, puisque $r_0 = 0$. La régularité supplémentaire supposée sur v_1 permet de compenser ce fait, en lien avec la platitude du domaine. Ces lemmes permettent d'obtenir également, toujours par la méthode de W. von Wahl, les résultats d'unicité suivants pour (NS).

THÉORÈME 4. – *Soit* Ω *un domaine vérifiant les hypothèses du théorème* 1, *et soit* $\bar{v}_0 \in \mathrm{H}(\Omega)$ *un champ de vecteurs axisymétrique. Alors il existe une unique solution « à la Leray » des équations de Navier–Stokes* (NS), *elle est axisymétrique et c'est la solution de* ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$).

Dans le cas où Ω *vérifie les hypothèses du théorème* 2, *si* $\bar{v}_0$ *un champ de vecteurs axisymétrique, de divergence nulle donnant lieu a une solution* $\bar{v}$ *« à la Leray » de* ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$) *vérifiant en plus* $\bar{v} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^{2+\varepsilon})$, *alors il existe une unique solution « à la Leray » des équations de Navier–Stokes* (NS)*, elle est axisymétrique et c'est* $\bar{v}$*.*

Remarques 1. – L'hypothèse $\bar{v} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^{2+\varepsilon})$ est bien sûr restrictive ; pour $\varepsilon \geqslant 1$, elle est vérifiée si v_0 est petit dans $\mathrm{L}^{2+\varepsilon}$. Pour $\varepsilon < 1$, F. Planchon a obtenu dans [7] une telle solution dans tout l'espace sous une condition de petitesse de la donnée initiale dans un espace de Besov.

Démonstration du théorème 3. – On utilise la méthode de Kato, qui revient à écrire le système ($\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}}$) sous la forme « mild » suivante (*voir* [2] pour des détails) :

$$v(t,x) = \mathrm{e}^{t\nu\Delta} v_0 + \int_0^t P\,\mathrm{e}^{(t-s)\nu\Delta} \mathrm{div}(v \otimes v)(s)\,\mathrm{d}s.$$

On peut ainsi écrire que $v(t,x) = S(t)v_0 + B(v,v)$, où $S(t)$ est le semi-groupe de la chaleur, et appliquer un théorème de point fixe (*voir* [2], lemme 1.2.6). On montre ainsi le lemme suivant, où $X_T \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \text{ axisymétrique} \mid v \in \mathrm{L}^\infty([0,T], \mathrm{L}^2_0) \text{ et } t^{1/2}\nabla v \in \mathrm{L}^\infty([0,T], \mathrm{L}^2_0)\}$.

LEMME 3. – *Il existe une constante* C *telle que le résultat suivant soit vérifié. Soit* $v_0 \in \mathrm{L}^2_0$*. Pour tout temps* $T \geqslant 0$*, et pour tout* $t \leqslant T$*, on a* $\|S(t)v_0\|_{X_T} \leqslant C\,\|v_0\|_{\mathrm{L}^2_0}$*.*

D'autre part, il existe $\eta \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$ *avec* $\lim_{T\to 0} \eta(T) = 0$*, telle que si* u *et* v *sont dans* X_T*, alors* $\|B(u,v)\|_{X_T} \leqslant \eta(T)\|u\|_{X_T}\|v\|_{X_T}$*.*

Ce lemme conduit classiquement au résultat. Sa démonstration repose sur le fait que le produit de deux fonctions dans L^2_0 se comporte exactement comme en deux dimensions d'espace, ce qui permet de gagner une demi-dérivée par rapport au cas tridimensionnel ; on fait aussi appel à des estimations dans des espaces à poids (*voir* [11], chapitre V, ou [8]).

Références bibliographiques

[1] Achtaich N., Injections de type Sobolev, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 303 (1985).
[2] Cannone M., Ondelettes, paraproduits et Navier–Stokes, Diderot Éditeur, Arts et Sciences, 1995.
[3] Constantin P., Foias C., Navier–Stokes Equations, Chicago University Press, 1988.
[4] Fujita H., Kato T. On the Navier–Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. and Anal. 16 (1964) 269–315.
[5] Gallagher I., The tridimensional Navier–Stokes equations with almost bidimensional data: stability, uniqueness and life span, Int. Math. Res. Notices 18 (1997) 919–935.
[6] Gallagher I., Ibrahim S., Majdoub M., Existence et unicité de solutions pour le système de Navier–Stokes axisymétrique, Commun. Partial Differ. Eq. (à paraître) et Prépublication de l'Université Paris-Sud, 1999.
[7] Planchon F., Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^3$, Ann. Inst. Henri-Poincaré 13 (1996) 319–336.
[8] Journé J.-L., Calderón–Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderòn, Lect. Notes in Math. 994, Springer-Verlag, 1983.
[9] Leray J., Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1933) 193–248.
[10] Lions J.-L., Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
[11] Stein E., Harmonic Analysis, Princeton University Press, 1993.
[12] Ukhovskii M.R., Yudovitch V., Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space, J. Appl. Math. and Mech. 32 (1968) 52–61.
[13] von Wahl W., The Equations of Navier–Stokes and Abstract Parabolic Equations, Aspects of Mathematics, Braunschweig, 1985.